# Appunti di Analisi Complessa

Viola Giovannini
Luca Bruni

26 giugno 2017

# Indice

# Capitolo 1

# Calcolo differenziale su $\mathbb{C}$

Consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio metrico con la metrica indotta dalla norma $|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$. Teniamo sempre a mente l'isomorfismo tra $\mathbb{R}$ spazi vettoriali $\mathbb{C} \cong_\varphi \mathbb{R}^2$ con

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$$

tale che $\varphi(1) = (1, 0)$ e $\varphi(i) = (0, 1)$. Pertanto la norma complessa equivale alla norma euclidea di $\mathbb{R}^2$. Abbiamo pertanto le stesse nozioni di continuità, convergenza...

**Proprietà sui complessi:** siano $z, w \in \mathbb{C}$, allora:

- $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$
- $\bar{z}\bar{w} = \overline{zw}$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|z| \geq max(|\Re(z)|, |\Im(z)|)$
- $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$
- $|z||w| = |zw|$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

**Definizione 1.1** *Dato $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, esiste unico $-\pi < \theta \leq \pi$ tale che $z = |z|e^{i\theta}$. La scrittura di $z$ prende il nome di* ***forma polare****, $\theta$ è detto* ***argomento principale*** *e si indica con $Arg(z)$. La funzione $Arg : \mathbb{C} - \{0\} \to ]-\pi, \pi]$ è tale che $z \to Arg(z)$.*

Osservazione: La funzione $Arg$ non è continua lungo l'asse reale negativo ($\mathbb{R}^-$). Inoltre, per ogni $z \notin \mathbb{R}^-$ vale che $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$.

**Proposizione 1.0.1** *Sia $\{z_n\}$ una successione di numeri complessi, allora $z_n \to z \in \mathbb{C}$ se e solo se $\Re(z_n) \to \Re(z)$ e $\Im(z_n) \to \Im(z)$.*

*Dimostrazione:* $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow |z_n - z| \to 0$. Per le proprietà della norma su $\mathbb{C}$ abbiamo $max\{|\Im(z_n) - \Im(z)|, |\Re(z_n) - \Re(z)|\} \leq |z_n - z| \leq |\Im(z_n) - \Im(z)| + |\Re(z_n) - \Re(z)|$, passando al limite si ottiene la tesi.

$\bowtie$

ESEMPIO: Sia $\{z_n\}$ una successione con $z_n = \frac{1}{2^n} + i\frac{n}{n+1}$ allora $z_n \to i$ perché possiamo ragionare membro a membro per il teorema precedente

**Corollario 1.0.2** *Siano $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ due successioni tali che $z_n \to z$ e $w_n \to w$ allora $z_n \pm w_n \to z \pm w$, $z_n w_n \to zw$, $|z_n| \to |z|$, $\bar{z_n} \to \bar{z}$ e se $z \neq 0$ e $z_n \neq 0$ allora $\frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z}$.*

**Definizione 1.2** *Data la successione $\{z_n\} \in \mathbb{C}$ indichiamo $S_n = z_0 + z_1 + ... + z_n = \sum_{i=0}^{n} z_i$ la* ***successione delle somme parziali****. Inoltre chiamiamo* ***serie*** *$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=0}^{n} z_i$. Se tale successione converge a $s \in \mathbb{C}$ allora $s$ è detta* ***somma della serie:*** *$s = \sum_{i=0}^{\infty} z_n$*

OSSERVAZIONE: Se la serie degli $z_n$ converge allora $z_n \to 0$ (non è vero il viceversa).

ESEMPIO: $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ converge $\Leftrightarrow |w| < 1$ (serie geometrica):
$\Rightarrow$) Se $|w| \geq 1$ allora $|w^n| = |w|^n$ e la serie non converge, assurdo;
$\Leftarrow$) Se $|w| < 1$, data $S_n = \sum_{i=0}^{n} w^n \Rightarrow 1 - w^{n+1} = S_n(1-w) \Rightarrow S_n = \frac{1-w^{n+1}}{1-w}$. Adesso $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-w}$ poiché $|\frac{1-w^{n+1}}{1-w} - \frac{1}{1-w}| = |\frac{w^{n+1}}{1-w}| \to 0$.

**Definizione 1.3** *Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$* ***converge assolutamente*** *se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge.*

**Proposizione 1.0.3** *Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge. Inoltre $|\sum_{n=0}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$.*

*Dimostrazione:* Visto che $|z_n| \geq max(|\Re(z_n)|, |\Im(z_n)|) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \geq \sum_{n=0}^{\infty} |\Im(z_n)| \geq \sum_{n=0}^{\infty} \Im(z)$. Per la convergenza assoluta su $\mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \Im(z)$ converge e pertanto $\sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \Re(z_n) + i\sum_{n=0}^{\infty} \Im(z)$ converge.
$|S_n| = |\sum_{i=0}^{n} z_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |z_i|$, passando al limite si ha la tesi.

$\bowtie$

ESERCIZIO: Dimostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+in^2}$ converge assolutamente e quindi converge.
Osserviamo che $|n + in^2| \geq max(n, n^2) = |n^2| = n^2$ e pertanto $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{1}{n+in^2}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Dato che la serie armonica di grado due converge, converge anche la serie di partenza.

ESERCIZIO: Dimostrare che le seguenti serie convergono assolutamente (e quindi convergono) per ogni $z \in \mathbb{C}$:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ **esponenziale complessa** $e^z$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ **seno complesso** $sin(z)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ **coseno complesso** $cos(z)$

Dimostriamo soltanto la prima: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ converge per il criterio del rapporto.

**Teorema 1.0.4 (Teorema di moltiplicazione di Cauchy)** *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie complesse convergenti assolutamente, allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$$

**Corollario 1.0.5** *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ vale che $e^z e^w = e^{z+w}$.*

*Dimostrazione:* $e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m w^{n-m}}{m!(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z^m w^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}$.

$\bowtie$

OSSERVAZIONE: Se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ per la definizione di seno e coseno complesso. Per quanto scritto, la funzione esponenziale è una funzione periodica in $y$ (ha periodo $2\pi i$) e dunque, per invertirla, restringo il dominio della parte immaginaria a $]-\pi, \pi]$ ($S = -\pi < \Im(z) \leq \pi$). Definiamo quindi l'inversa:

**Definizione 1.4** *La funzione* $Log : \mathbb{C} - \{0\} \to S$ *tale che* $Log(z) = log(|z|) + iArg(z)$ *è detta* ***logaritmo principale****. Notiamo che il logaritmo principale è una funzione discontinua su* $\mathbb{R}^-$.

**Definizione 1.5** *Sia* $f$ *una funzione di variabile complessa definita in un intorno* $U \subseteq \mathbb{C}$ *di un punto* $z \in \mathbb{C}$. $f$ *si dice* ***differenziabile in senso complesso*** *in* $z$ *se esiste il limite*

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

*Se il il limite esiste lo si chiama* ***derivata*** *di* $f$ *in* $z$ *e si indica con* $f'(z)$.

ESEMPIO: La funzione $f(z) = z$ è differenziabile in ogni punto e $f'(z) = 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE: Sia $f$ una funzione di variabile complessa, scriviamo $f = u + iv$ con $u, v$ funzioni reali e pertanto posso vedere $f$ come una funzione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ tale che $f(x+iy) \sim f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Può capitare che $f$ come funzione reale sia $C^\infty$ (e quindi differenziabile), ma che non sia differenziabile in senso complesso.

ESEMPIO: $f(z) = \bar{z}$ non è differenziabile in senso complesso in nessun punto infatti $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$ e il risultato dipende dal cammino scelto per far tendere $h$ a 0. Se invece consideriamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come $f(x, y) = (x, -y)$ la funzione è $C^\infty$ (le derivate sono lineari o costanti).

**Proposizione 1.0.6** *Sia* $f$ *una funzione di variabile complessa,* $f$ *derivabile nel punto* $z$*, allora* $f$ *è continua in* $z$.

*Dimostrazione:* Ovvia.

$\bowtie$

**Proposizione 1.0.7 (Proprietà della derivata complessa:)** *Siano* $f, g$ *funzioni di variabile complessa differenziabili in* $z$*, allora:*

1. $f \pm g$ *è differenziabile in* $z$ *e vale* $(f \pm g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
2. $fg$ *è differenziabile in* $z$ *e vale* $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f$ *è differenziabile in* $z$ *e vale* $(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z)$;
4. *Se* $g(z) \neq 0$ *allora* $\frac{f}{g}$ *è differenziabile in* $z$ *e vale* $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

*Dimostrazione:* Ovvia.

$\bowtie$

OSSERVAZIONE: Ogni funzione polinomiale a coefficienti complessi è differenziabile.

**Teorema 1.0.8** *Siano* $f, g$ *funzioni di variabile complessa,* $g$ *è differenziabile in* $a$ *e* $f$ *differenziabile in* $g(a)$*, allora* $(f \circ g)$ *è differenziabile in* $a$ *e vale* $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.

*Dimostrazione:* Consideriamo $U \subseteq \mathbb{C}$ intorno di $g(a)$ dove $f$ è ben definita e definiamo la funzione

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(g(a))}{z-g(a)} & z \in U - \{g(a)\} \\ f'(g(a)) & z = g(a) \end{cases}$$

Adesso $\frac{f(g(z))-f(g(a))}{z-a} = h(g(z))\frac{g(z)-g(a)}{z-a}$ per ogni $z \in g^{-1}(U) - \{a\}$. Passando al limite $z \to a$ otteniamo $f'(g(a))g'(a)$ a destra e dunque, per transitività, si ottiene la tesi (perché la prima scrittura è il rapporto incrementale di $g \circ f$).

$\bowtie$

**Definizione 1.6** *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $U$ intorno di un punto $a$; $f$ si dice* ***differenziabile in senso reale*** *in $a$ se esiste una applicazione lineare $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x) - f(a) = A(x-a) + r(x)$ con $r(x)$ che soddisfa la condizione $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0$.*

Osservazione: Se esiste l'applicazione lineare $A$ definita come sopra, allora $A$ è unica e la sua rappresentazione in base canonica valutata in $a$ è:

$$J(f,a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

**Proposizione 1.0.9** *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ con $a \in U$ e $U$ aperto di $\mathbb{C}$, allora sono fatti equivalenti:*

1. *$f$ è differenziabile in $a$ come funzione di variabile complessa;*
2. *$f = (u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è differenziabile in $(\Re(a), \Im(a)) = a$ e l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha come matrice associata la Jacobiana $J(f,a)$ che è la moltiplicazione per il numero complesso $f'(a)$ ($J(f,a)c = f'(a)c$).*

*Dimostrazione:* Segue dalle definizioni, usando il fatto che $f'(a) = A$ e scrivendo la derivata con la definizione di o-piccolo.

$\bowtie$

Ci chiediamo adesso come si rappresenta una matrice di moltiplicazione, ovvero quella matrice $A$ che applicata al vettore $(a,b) \sim a+ib$ restituisce il vettore moltiplicato per $w = (\alpha, \beta) \sim \alpha + i\beta$. Scrivendo tale matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ si ottiene

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(w) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Vale anche il viceversa di quanto osservato, ovvero, se una matrice è fatta nel modo sopra riportato, allora questa rappresenta la moltiplicazione per un numero complesso della forma $\alpha + i\beta$

**Teorema 1.0.10** *Sia $f = u+iv : U \to \mathbb{C}$, $U$ aperto in $\mathbb{C}$ e sia $a \in U$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$f$ è differenziabile in $a$ in senso complesso;*
2. *$f$ è differenziabile in $a$ in senso reale e si ha che $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$. Tali formule sono dette* ***equazioni di Cauchy-Riemann****.*

*Inoltre vale che $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$.*

*Dimostrazione:* Segue dal teorema precedente e dall'osservazione.

$\bowtie$

Esempio: Mostriamo che $f(z) = e^z$ è differenziabile. Consideriamo $f = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ e pertanto vale che $\Re(f) = u(x,y) = e^x \cos y$ e $\Im(f) = v(x,y) = e^x \sin y$. Calcoliamo il Jacobiano della funzione $f = (u,v)$ in un punto generico :

$$J(f,(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

Le derivate parziale sono tutte continue in $\mathbb{R}^2$ quindi la funzione è differenziabile per il teorema del differenziale totale, inoltre soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann e pertanto la funzione è differenziabile anche in senso complesso. Vale dunque che $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$.

Per mostrare la differenziabilità delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$ è sufficiente notare che, dalle definizioni in serie, si ha

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Adesso somma e prodotti di funzioni differenziabili è differenziabile e pertanto si ha la tesi.

**Corollario 1.0.11 (Caratterizzazione delle funzioni costanti)** *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ con $U$ aperto connesso di $\mathbb{C}$, allora $f$ è costante in $U$ se e solo se $f$ è differenziabile per ogni $z \in U$ e $f'(z) = 0$. In particolare se $\Re(f)$ o $\Im(f)$ è costante allora $f$ è costante (sempre se $f$ è differenziabile)*

*Dimostrazione:* $\Rightarrow$) Se $f = u + iv$ costante allora sia $u$ che $v$ sono costanti e pertanto le derivate parziali di $u, v$ valgono tutte $0 \Rightarrow f'(z) = 0$ per ogni $z \in U$;
$\Leftarrow$) Per le equazioni di Cauchy-Riemann, per ogni $z \in U$ si ha $0 = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$, ma allora (sfruttando l'ipotesi di connessione) $u$ e $v$ sono costanti $\Rightarrow f$ è costante.
L'ultima affermazione deriva direttamente dalle equazioni di Cauchy-Riemann.

$\bowtie$

Esempio: Sia $f(z) = \Re(z)$, questa funzione non è differenziabile, se lo fosse, infatti, dovrebbe essere costante poiché $Im(f)$ è costante, ma questo è assurdo.

**Definizione 1.7** *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ con $U$ aperto di $\mathbb{C}$, $f$ si dice **olomorfa in $U$** se è differenziabile per ogni $z \in U$.*

**Corollario 1.0.12 (Teorema della funzione implicita)** *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa con $U$ aperto di $\mathbb{C}$ e fissiamo $a \in U$, allora:*

1. *Se $f'(a) \neq 0$ allora esiste un intorno aperto $U_1 \subseteq U$ di $A$ tale che $f_{|_{U_1}}$ è iniettiva;*
2. *Se $f$ è iniettiva e $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in U$, allora $f(U)$ è aperto e $f^{-1} : f(U) \to U$ è olomorfa con $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ $\forall z \in U$.*

*Dimostrazione:* Segue dal teorema della funzione implicita per $f$ da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, basta mostrare che $J(f,z)$ è invertibile se e solo se $f'(z) \neq 0$. $J(f,z)$ invertibile $\Leftrightarrow det(J(f,z)) \neq 0 \Leftrightarrow (\frac{\partial u}{\partial x}(z))^2 + (\frac{\partial v}{\partial x}(z))^2 = |f'(z)| \neq 0 \Leftrightarrow f'(z) = 0$.

$\bowtie$

Esempio: $f(z) = e^z$ è iniettiva nell'insieme $S = \{z \in \mathbb{C} | -\pi \leq \Im(z) < \pi\}$ e $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Non possiamo applicare il teorema della funzione implicita perché $S$ non aperto, ma possiamo restringere il dominio a $S_0 = \{z \in \mathbb{C} | -\pi < \Im(z) < \pi\}$. Pertanto $f_{|_{S_0}} : S_0 \to \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ è invertibile e la sua inversa è $Log_{|_{\mathbb{C}-\mathbb{R}^-}} : \mathbb{C} - \mathbb{R}^- \to S_0$ e dunque la sua derivata vale $Log'(z) = \frac{1}{z}$.

**Definizione 1.8** *Sia $u : U \to \mathbb{R}$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto una funzione di classe $C^2$ (cioè esistono e sono continue tutte le derivate parziali prime e seconde), allora $u$ si dice* ***armonica*** *se per ogni $(x, y) \in U$ il Laplaciano è uguale a 0, ovvero:*

$$\Delta u = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) = 0$$

**Teorema 1.0.13** *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ con $U$ aperto di $\mathbb{C}$ funzione olomorfa tale che $f = u + iv$ con $u, v \in C^2$, allora $u, v$ sono funzioni armoniche.*

*Dimostrazione:* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial x}) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dove le uguaglianze derivano dalle equazioni di Cauchy-Riemann e dal teorema di Schwartz. La funzione $u$ è quindi armonica. Ripetendo passaggi analoghi per $v$ si ha la tesi.

$\bowtie$

Ci chiediamo se vale il viceversa, dimostreremo più avanti che è vero se l'insieme di definizione della funzione è semplicemente connesso:

**Teorema 1.0.14** *Sia $u : U \to \mathbb{R}$ armonica e $U$ aperto in $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso, allora $u$ è la parte reale di una funzione olomorfa (vediamo $U$ come aperto di $\mathbb{C}$ anziché aperto di $\mathbb{R}^2$)*

*Dimostrazione:* mancante

$\bowtie$

Esempio: Data la funzione $Log(z) = log(|z|) + iArg(z)$, dato che $log(|z|)$ è $C^2$ e $Log(z)$ è olomorfa, si ha, per il teorema dimostrato, che $log(|z|)$ è armonica in $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$. Possiamo fare di più, possiamo mostrare che è armonica in tutto $\mathbb{C} - \{0\}$. Se considero infatti un diverso "ramo" del logaritmo, definendo

$$\begin{cases} Arg_{[0,2\pi)} : \mathbb{C} - \{0\} :\to [0, 2\pi) \qquad z \to \theta \text{ tale che } z = |z|e^{i\theta} \\ Log_{[0,2\pi)} : \mathbb{C} - \{0\} \to S_1 = \{z \in \mathbb{C} |\ 0 \leq \Im(z) < 2\pi\} \qquad z \to log(|z|) + iArg_{[0,2\pi)}(z) \end{cases}$$

La funzione $Log_{[0,2\pi)}$ definita è olomorfa in $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$ e applicando il solito teorema abbiamo che $log(|z|)$ è armonica sui reali negativi. Unendo i due risultati $log(|z|)$ è armonica in $\mathbb{C} - \{0\}$.

notazioni da aggiustare, capire chi è $dz$ e compagnia

**Definizione 1.9** *Una funzione $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice* ***integrabile*** *se $\Re(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\Im(f) : [a, b] \to \mathbb{C}$ sono integrabili. In tal caso definiamo*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (\Re(f))(t)dt + i \int_a^b (\Im(f))(t)dt$$

**Proposizione 1.0.15** *L'integrale sopra definito soddisfa le regole di integrazione valide per le funzioni a valori reali, in particolare:*

1. *L'integrale è $\mathbb{C}$ lineare;*
2. $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$;
3. *Sia $a < c < b$, allora $f$ è integrabile in $[a, b]$ se e solo se $f$ è integrabile in $[a, c]$ e $[c, b]$. Inoltre vale che $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$;*
4. *Se $f$ è continua e $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ è una* ***primitiva*** *di $f$ (ovvero $F' = f$ come funzione di variabile reale, la derivata complessa sarebbe nulla, probabilmente se derivo vedendo $[a, b]$ succedono dei casini perché non è una palla) allora $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$;*

5. *Consideriamo* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1([a,b])$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continua, allora* $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds$

*Dimostrazione:*

1. $\int_a^b if(t)dt = \int_a^b \Re(if(t))dt + \int_a^b \Im(if(t))dt = \int_a^b -(\Im(f))(t)dt + \int_a^b (\Re(f))(t)dt = i\int_a^b f(t)dt$, dove le uguaglianze derivano dal fatto che se $f = u + iv \Leftrightarrow if = v - iu$;

2. Sia $w = \int_a^b f(t)dt \in \mathbb{C}$. Se $w = 0$ ok, altrimenti definiamo $u = \frac{\bar{w}}{|w|} \Rightarrow uw = |w| \Rightarrow |\int_a^b f(t)dt| = uw = \int_a^b uf(t)dt = \int_a^b (\Re(uf(t)))dt \leq \int_a^b |uf(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt$, dove la parte immaginaria scompare perché $uw \in \mathbb{R}$ e inoltre $|u| = 1$ per costruzione;

3. Segue dalle dimostrazioni a valori reali;

4. Segue dalle dimostrazioni a valori reali;

5. Segue da 4: se $F$ è una primitiva di $f$, allora $f \circ \varphi$ una primitiva di $(f \circ \varphi)\varphi'$.

$\bowtie$

**Definizione 1.10** *Una funzione* $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *si dice* ***curva regolare*** *se sia la sua parte reale* $\Re(\gamma) : [a,b] \to \mathbb{C}$, *sia* $\Im(\gamma) : [a,b] \to \mathbb{C}$ *sono funzioni di classe* $C^1$.

**Definizione 1.11** *Una funzione* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *continua si dice* ***curva regolare a tratti*** *se esiste una partizione di* $[a,b]$ *data da* $a = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = b$ *tale che le restrizioni* $\gamma_i = \gamma_{|_{[a_i,a_{i+1}]}}$ *siano curve regolari per ogni* $i$.

**Definizione 1.12** *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}$ *aperto, si dice* ***forma differenziale*** *una espressione* $\omega = f(z)dz$ *con* $f : U \to \mathbb{C}$ *funzione continua.*

**Definizione 1.13** *Sia* $\omega$ *una forma differenziale in* $U$ *aperto di* $\mathbb{C}$ *e sia* $\gamma : [a,b] \to U$ *una curva regolare, allora definiamo* ***integrale di una forma differenziale*** $\omega$ ***lungo una curva regolare*** $\gamma$ *l'integrale curvilineo:*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

*Se* $\gamma$ *è una curva regolare a tratti, allora definiamo l'integrale:*

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Consideriamo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curva regolare e $t : [a_1,b_1] \to [a,b]$ di classe $C^1$ tale che $t'(s) > 0$ $\forall s \in [a_1,b_1]$, allora $\gamma_1 = \gamma \circ t : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$ è una curva regolare ed è tale che $Im\gamma = Im\gamma_1$. Dunque $\gamma_1$ parametrizza lo stesso cammino di *gamma* in $\mathbb{C}$. Data $\omega = f(z)dz$ forma differenziale in $U$ con $\gamma([a,b]) \subseteq U$, si ha:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds =$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(t(s)))(\varphi \circ t)'(s)ds = \int_{a_1}^{b_1} (f \circ \varphi)(t(s))\varphi'(t(s))t'(s)ds =$$

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)ds = \int_\gamma \omega$$

L'integrale non dipende dalla parametrizzazione se il cambio di parametrizzazione ha derivata maggiore di 0 (ovvero sto percorrendo $[a, b]$ nello stesso verso). Se invece $\gamma_1 = \gamma \circ t$ con $t'(s) < 0$ per ogni $s \in [a_1, b_1]$, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_\gamma \omega$$

Esempio: Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ tale che $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ e sia $\omega = \frac{dz}{z}$ forma differenziale. Allora:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi it}} 2\pi i e^{2\pi it} dt = 2\pi i$$

Se invece ora consideriamo $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ tale che $\gamma_1(t) = e^{-2\pi it}$ allora:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 \frac{1}{e^{-2\pi it}} (-2\pi i) e^{-2\pi it} dt = -2\pi i = -\int_\gamma \omega$$

**Definizione 1.14** *Data $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ curva regolare a tratti, si definisce* ***lunghezza di*** $\gamma$ *l'integrale:*

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt = l(\gamma)$$

**Proprietà dell'integrale curvilineo:**

1. $\int_\gamma \omega$ è $\mathbb{C}$-lineare;
2. $\int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$ con $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ tale che $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ e $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$;
3. $|\int_\gamma \omega| \leq cl(\gamma)$ con $\omega = f(z)dz$ e $|f(z)| \leq c \; \forall z \in Im(\gamma) = \gamma([a, b])$;
4. Se $\omega = f(z)dz$ è una forma differenziale in $U$ tale che è il differenziale totale di una funzione $F : U \to \mathbb{C}$ olomorfa, ovvero $\omega = dF \Rightarrow \omega = F'(z)dz$ con $F' = f$, allora $\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ in quanto $F \circ \gamma$ è una primitiva di $(f \circ \gamma)\gamma'$

**Definizione 1.15** *Una forma differenziale $\omega$ in $U$ si dice* ***esatta*** *se è il differenziale totale di una funzione olomorfa $F : U \to \mathbb{C}$, ovvero $\omega = dF$.*

**Lemma 1.0.16** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso. Per ogni coppia di punti $z_1, z_2 \in U$ esiste una curva regolare a tratti $\gamma$ in $U$ tale che $\gamma([a, b]) \subseteq U$ e ha $z_1$ come punto iniziale e $z_2$ come punto finale.*

*Dimostrazione:* Fissiamo $z_1 \in U$ e definiamo

$$A = \{z \in U | \; \exists \text{curva regolare a tratti in U che parte da } z_1 \text{ e arriva a } z\}$$

Dimostriamo che $A$ è sia aperto che chiuso: se $z \in A$ e $B(z, \varepsilon) \subseteq U$ è una palla aperta $\Rightarrow B(z, \varepsilon) \subseteq A$ in quanto qualsiasi punto $p$ della palla lo unisco a $z$ tramite una curva regolare che è il raggio della palla. Allora posso collegare le due curve regolari (da $p$ a $z$ e da $z$ a $z_1$) ottenendo una curva regolare a tratti da $p$ a $z_1$ $\Rightarrow A$ è aperto; analogamente anche $U - A$ è aperto: se infatti $\bar{z} \in U - A$, considerando $B(\bar{z}, \bar{\varepsilon})$, $\forall \bar{p}$ nella palla ho una curva regolare a tratti che collega $\bar{p}$ a $\bar{z}$; se per assurdo $\bar{p} \notin A$ potrei collegare i cammini ottenendo una curva regolare a tratti da $z_1$ a $z \notin A$. Visto che $z_1 \in A$, $A$ è non vuoto e $U$ connesso $\Rightarrow A = U$.

$\bowtie$

**Teorema 1.0.17 (Teorema di caratterizzazione delle forme esatte)** *Consideriamo $\omega = f(z)dz$ forma differenziale in un aperto connesso $U \subseteq \mathbb{C}$, allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *$\omega$ è esatta in $U$;*
2. *$f$ ammette una primitiva in $U$;*
3. *Se $\gamma$ è una curva regolare chiusa ($\gamma(a) = \gamma(b)$), allora $\int_\gamma \omega = 0$;*
4. *Date $\gamma_1$, $\gamma_2$ curve regolari in $U$ con gli stessi estremi, allora $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.*

*Dimostrazione*

$1 \Leftrightarrow 2)$ $\omega = dF \Leftrightarrow \omega = F'(z)dz \Leftrightarrow F' = f$;

$3 \Leftrightarrow 4)$ Ovvia;

$1 \Rightarrow 3)$ $\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ poiché $\gamma$ è chiusa;

$4 \Rightarrow 2)$ Vorremmo esibire una primitiva di $f$: fissiamo $z_0 \in U$ e definiamo $F(z) = \int_\gamma \omega$ con $\gamma$ una qualsiasi curva regolare a tratti che parte da $z_0$ e termina in $z$, la quale esiste per il lemma precedente; $F(z)$ è ben definita in quanto $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ per ipotesi se $\gamma_1$ e $\gamma_2$ hanno gli stessi estremi. Vogliamo dimostrare che $F$ è olomorfa e che $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in U$: consideriamo un generico $z_1 \in U$ e mostriamo che $F$ è olomorfa in $z_1$: consideriamo la palla $B(z_1, \varepsilon) = U_1 \subseteq U$ (esiste perché $U$ è aperto), allora $\forall z \in U_1$ si ha $F(z) = F(z_1) + \int_\sigma \omega$ con $\sigma : [0,1] \to U_1$ tale che $\sigma(t) = (1-t)z_1 + tz$. $l(\sigma) = |z - z_1|$, allora $F(z) = F(z_1) + \int_\sigma \omega = F(z_1) + \int_\sigma f(z)dz = F(z_1) + \int_\sigma ((f(z) - f(z_1)) + f(z_1))dz = F(z_1) + \int_\sigma (f(z) - f(z_1))dz + f(z_1)(z - z_1)$ dunque

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z_1) + \frac{\int_\sigma (f(z) - f(z_1))dz}{z - z_1} \xrightarrow{z \to z_1} f(z)$$

infatti: visto che $f$ è continua in $z_1 \in U$, si ha che $\forall \bar{\varepsilon} > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che se $|z - z_1| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| < \bar{\varepsilon}$. Dunque se $|z - z_1| < \delta \Rightarrow |\int_\sigma (f(z) - f(z_1))| \leq \epsilon l(\sigma) = \epsilon |z - z_1|$. Quindi $F$ è differenziabile in $z_1$ con derivata esattamente $f$.

$\bowtie$

**Definizione 1.16** *Sia $\omega$ una forma differenziale in un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$, $\omega$ si dice **chiusa** se $\forall z \in U$, esiste un intorno $U_1$ di $z$, $U_1 \subseteq U$, tale che $\omega_{|U_1}$ è esatta.*

Osservazione: Una forma esatta è chiaramente chiusa (basta prendere $U_1 = U$ per ogni $z$), non vale invece il viceversa, ovvero esiste una forma chiusa che però non è esatta, facciamo un:

Esempio: $\omega = \frac{dz}{z}$ in $\mathbb{C} - \{0\}$ è chiusa: se $z \notin \mathbb{R}^-$, scelgo $U_1 = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ e in $U_1$ si nota che $\frac{1}{z}$ è la derivata del logaritmo principale; se $z \in \mathbb{R}^-$ scelgo un altro ramo del logaritmo (ad esempio tra 0 e $2\pi$) e $U_2 = \mathbb{C} - \mathbb{R}^+$ e tutto funziona bene. Pertanto $\omega$ è esatta in $U_1$ e in $U_2$. Vediamo però che $\omega$ non è esatta: $\int_\gamma \omega = 2\pi i \neq 0$ con $\gamma =$ curva che percorre in senso antiorario la circonferenza. $\gamma$ è una curva chiusa e pertanto, per il teorema precedente, $\omega$ non può essere esatta.

**Definizione 1.17** *Data $\omega$ una forma differenziale chiusa in un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ e $\gamma : [a,b] \to U$ curva continua, si dice **primitiva di $\omega$ lungo** $\gamma$ una funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ tale che $\forall t_0 \in [a,b]$ esiste un intorno $U_0 \subseteq U$ del punto $\gamma(t_0) \in U$ e una primitiva $F$ di $\omega_{|U_0}$ tale che $f(t) = F(\gamma(t))$ $\forall t \in \gamma^{-1}(U_0)$ (ovvero si sta richiedendo l'esistenza di un'applicazione continua che sia localmente una primitiva).*

**Teorema 1.0.18** *Esiste ed è unica (a meno di costanti additive) la primitiva di $\omega$ fomra differenziale chiusa lungo $\gamma$.*

*Dimostrazione:* **Unicità:** supponiamo di avere $f_1, f_2$ primitive di $\omega$ lungo $\gamma$, allora $\forall t \in [a,b]$ vale che esistono $F_1, F_2$ primitive di $\omega$ in un intorno del punto $\gamma(t)$ tali che $F_1(\gamma(t)) = f_1(t)$ e $F_2(\gamma(t)) = f_2(t)$ nella controimmagine dell'intorno $\Rightarrow F_2 - F_1 =$costante nell'intorno di $\gamma(t) \Rightarrow f_2 - f_1 =$ costante in un intorno di $t \Rightarrow f_2 - f_1$ è localmente costante $\Rightarrow f_2 - f_1$ è costante su tutto $[a,b]$ poiché è connesso;
**Esistenza:** $\omega$ chiusa $\Rightarrow$ esiste un ricoprimento di $U$ formato da palle aperte nella quale $\omega$ ammette una primitiva. Applichiamo il teorema del numero di Lebesgue a $\gamma : [a,b] \to U$: dato che $[a,b]$ è compatto esiste una partizione $a_0 = a < a_1 < ... < a_n = b$ tale che $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subseteq B(z_i, \varepsilon_i) = U_i$ con $B(z_i, \varepsilon_i)$ palla aperta in cui $\omega$ ammette una primitiva $F^{(i)}$ e $\gamma(a_{i+1}) \in U_i \cap U_{i+1}$ connesso. A meno di costanti, possiamo supporre $F^{(i)}|_{U_i \cap U_{i+1}} = F^{(i+1)}|_{U_i \cap U_{i+1}}$ (ovvero si incollano bene). Ponendo allora $f(t) = F^{(i)}(\gamma(t))$ per $t \in [a_i, a_{i+1}]$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ è continua ed è una primitiva di $\omega$ lungo $\gamma$.

$\bowtie$

OSSERVAZIONE: Se $\gamma$ è regolare a tratti e $f$ è una primitiva di $\omega$ lungo $\gamma$ allora:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} \omega = \sum_{i=0}^{n} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) = f(b) - f(a)$$

**Definizione 1.18** *Sia $\gamma : [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ curva continua, $\omega$ forma differenziale chiusa in $U$, $f$ primitiva di $\omega$ lungo $\gamma$, definiamo*

$$\int_\gamma \omega = f(b) - f(a)$$

Supponiamo d'ora in poi che tutte le curve siano definite in $[0,1]$ (possiamo supporlo in quanto ma basta fare un cambio di parametrizzazione che lascia invariati gli integrali), ovvero parliamo di cammini.

**Proposizione 1.0.19** *Se $\gamma$ è un cammino chiuso che non passa per l'origine, allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz$$

*è un numero intero.*

*Dimostrazione:* Una primitiva di $\frac{dz}{z}$ lungo $\gamma$ deve soddisfare $f(t) = Log(\gamma(t))\ \forall t \in [0,1]$, cioè deve essere un ramo del logaritmo lungo la curva $\gamma \Rightarrow e^{f(t)} = \gamma(t)\ \forall t \in [0,1]$ e visto che $\gamma(1) = \gamma(0) \Rightarrow f(1) - f(0) \in (2\pi i)\mathbb{Z}$. Dunque

$$\int_\gamma \omega = f(1) - f(0) \in (2\pi i)\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz \in \mathbb{Z}$$

$\bowtie$

**Definizione 1.19** *Sia $\delta : [a,b] \times [c,d] \to U$ una funzione continua con $U$ aperto di $\mathbb{C}$ e sia $\omega$ una forma differenziale chiusa in $U$. Una **primitiva di** $\omega$ **lungo** $\delta$ è una funzione continua $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ tale che $\forall (t_0, w_0) \in [a,b] \times [c,d]$ esiste un intorno $U_0$ aperto di $\delta(t_0, w_0)$ e una primitiva $F$ di $\omega_{|U_0}$ tale che $f(t,u) = F(\delta(t,u))\ \forall (t,u) \in U_0$.*

**Proposizione 1.0.20** *Nelle notazioni della definizione precedenti, esiste ed è unica (a meno di costanti additive) la primitiva di $\omega$ forma differenziale chiusa lungo $\delta$.*

*Dimostrazione:* **Unicità:** analoga a quella svolta con $\gamma$;
**Esistenza:** dato che $\omega$ è una forma chiusa, sappiamo esistere un ricoprimento di $U$ costituito da palle aperte in cui $\omega$ ammette una primitiva. Per il teorema del numero di Lebesgue esiste una partizione

$$\begin{cases} a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \\ c = u_0 < u_1 < ... < u_n = d \end{cases}$$

tale che $\delta([t_i, t_{i+1}], [u_j, u_{j+1}])$ è contenuta in una palla aperta $U_{i,j}$ in cui $\omega$ ha una primitiva $F^{(i,j)}$. Fissato $j$ possiamo assumere a meno di una costante che $F^{(i,j)}|_{U_{i,j} \cap U_{i+1,j}} = F^{(i+1,j)}|_{U_{i,j} \cap U_{i+1,j}}$. Definiamo $f_j : [a,b] \times [u_j, u_{j+1}] \to \mathbb{C}$ tale che $f_j(t,u) = F^{(i,j)}(\delta(t,u))$ se $t \in [t_i, t_{i+1}]$. A questo punto $f_j$ è continua nel rettangolo $[a,b] \times [u_j, u_{j+1}]$ ed è la primitiva di $\omega$ lungo $\delta_{|_{[a,b]\times[u_j,u_{j+1}]}}$ con $t$ che varia e $u$ fissato. Allora si ha che $f_j(t,u)$ e $f_{j+1}(t,u)$ per $u \in [u_j, u_{j+1}]$ sono delle primitive di $\omega$ lungo $\gamma(t) = \delta(t, u_{j+1})$. Essemdo primitive differiscono per una costante e pertanto posso assumere che $f_j(t, u_j) = f_{j+1}(t, u_{j+1})$ per ogni $t \in [a,b]$. Possiamo allora definire $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ tale che $f(t,u) = f_j(t,u)$ se $u \in [u_j, u_{j+1}]$. La funzione così definita è continua ed è una primitiva di $\omega$ su $\delta$.

$\bowtie$

**Teorema 1.0.21** *Siano $\gamma_0, \gamma_1$ cammini omotopicamente equivalenti da $I = [0,1]$ in $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, se $\omega$ è una forma differenziale chiusa, allora $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.*

*Dimostrazione:* Sia $\delta : I \times I \to U$ una omotopia di cammini tra $\gamma_0$ e $\gamma_1$ ovvero:

$$\begin{cases} \delta(t,0) = \gamma_0(t) & \forall t \in I \\ \delta(t,1) = \gamma_1(t) & \forall t \in I \\ \delta(0,s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) & \forall s \in I \\ \delta(1,s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) & \forall s \in I \end{cases}$$

Per la proposizione precedente, esiste $f : I \times I \to \mathbb{C}$ primitiva di $\omega$ lungo $\delta$ che quindi soddisfa:

$$f_{|_{\{0\}\times I}} = \text{costante} \qquad f_{|_{\{1\}\times I}} = \text{costante}$$

in particolare dunque $f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = f(1,1)$ e inoltre $f_{|_{I\times\{0\}}}$ è una primitiva di $\omega$ lungo $\gamma_0$ e $f_{|_{I\times\{1\}}}$ è una primitiva di $\omega$ lungo $\gamma_1$. Adesso

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(1,0) - f(0,0) \qquad \int_{\gamma_1} \omega = f(1,1) - f(0,1)$$

che è la tesi cercata.

$\bowtie$

**Teorema 1.0.22** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso. Se $\omega$ è una forma differenziale chiusa in $U$, allora $\omega$ è anche esatta in $U$.*

*Dimostrazione:* Sia $\gamma$ un cammino chiuso in $U \Rightarrow \gamma$ è omotopicamente equivalente al cammino costante, allora $\int_\gamma \omega = \int_{\text{camm. cst}} \omega = 0 \Rightarrow \omega$ è esatta per il teorema di classificazione delle forme esatte.

$\bowtie$

**Definizione 1.20** *Sia $a$ fissato, $\gamma : I \to \mathbb{C} - \{a\}$ cammino chiuso, si definisce* ***indice del cammino chiuso $\gamma$ rispetto ad*** *$a$ la quantità*

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz \in \mathbb{Z}$$

Per calcolare $I(\gamma, a)$ si cerca la primitiva di $\frac{1}{z-a}dz$ rispetto a $\gamma$ cioè $f : I \to \mathbb{C}$ tale che $e^{f(t)} = \gamma(t) - a$ per ogni $t \in I$. Una volta calcolata $I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}(f(1) - f(0))$.

Esempio: Consideriamo $\gamma_k : I \to S^1 \subseteq \mathbb{C} - \{0\}$ tale che $\gamma_k(t) = e^{2\pi ikt}$. Allora $f(t) = 2\pi ikt$ è una primitiva di $\frac{1}{z}dz$ lungo $\gamma \Rightarrow \int_{\gamma_k} \frac{1}{z}dz = \frac{f(1)-f(0)}{2\pi i}$. Dunque $I(\gamma_k, 0) = k$ (sto percorrendo la circonferenza $k$ volte).

**Proposizione 1.0.23** *Ogni cammino chiuso $\gamma$ in $\mathbb{C} - \{a\}$ è omotopicamente equivalente al cammino che percorre $k$ volte la circonferenza di raggio $\gamma(0) - a$ centrata in $a$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$; inoltre $I(\gamma, a) = k$.*

*Dimostrazione:* Supponiamo che $a = 0, \gamma(0) = \gamma(1) = 1$ (possiamo farlo per il cambio di parametrizzazione). Abbiamo dunque $\gamma : I \to \mathbb{C} - \{0\}$ e consideriamo il rivestimento universale di $\mathbb{C} - \{0\}$ dato dall'esponenziale $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$. Notiamo che una primitiva $f$ di $\omega = \frac{1}{z}dz$ lungo $\gamma$ è esattamente un sollevamento di $\gamma$, dunque esiste unica $f$ tale che $f(0) = 0$ e $exp \circ f(t) = e^{f(t)} = \gamma(t)$;

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\exists! f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \mathbb{C} \\ & \mathbb{C} - \{0\} \arrow[ur, "exp"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre $f : I \to \mathbb{C}$ è un cammino convesso e dunque è omotopicamente equivalente al cammino che parte da $f(0) = 0$ fatto da un segmento. Esiste dunque $F : I \times I \to \mathbb{C}$ omotopia di cammini tra $f$ e $\gamma : I \to [0, f(1)]$ tale che $\gamma(t) = f(1)t$ e $\gamma(1) = 1$. Vale quindi che $f(1) = 2\pi ki$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$. Allora $exp \circ \gamma$ è il cammino $\gamma_k$ definito come sopra e $H = exp \circ F : I \times I \to \mathbb{C}$ è una omotopia di cammini tra $\gamma$ e $\exp \circ \gamma = \gamma_k$. A questo punto $I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z}dz = I(\gamma_k, 0) = k$.

$\bowtie$

La proposizione ci dice che l'indice di un cammino $\gamma$ rispetto ad un punto $a$ conta il numero di giri percorsi da $\gamma$ intorno ad $a$ con segno positivo o negativo a seconda che i giri vengano percorsi, rispettivamente, in senso orario o antiorario.

**Proprietà dell'indice:**

1. $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in $\mathbb{C} - \{0\}$, allora $I(\gamma_0, a) = I(\gamma_1, a)$ poiché $\frac{1}{z}dz$ è una forma chiusa;

2. Se $\gamma(I) \subseteq U \subseteq \mathbb{C} - \{a\}$ con $U$ semplicemente connesso, allora $I(\gamma, a) = 0$;

3. L'immagine di un cammino chiuso è un insieme limitato, dunque esiste $r > 0$ tale che $\gamma(I) \subseteq \overline{B(0, r)}$ e $\mathbb{C} - \overline{B(0, r)}$ è connesso per archi $\Rightarrow C - Im(\gamma)$ ha un'unica componente connessa per archi illimitata: i punti interni a tale componente sono detti **interni alla curva** $\gamma$, gli altri sono detti **punti esterni a** $\gamma$. Possiamo a questo punto definire l'applicazione $I(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} - \gamma(I) \to \mathbb{Z}$ tale che $a$ viene mandato in $I(\gamma, a)$, la quale è localmente costante (costante su ogni componente connessa) e vale 0 sui punti esterni di $\gamma$.

Esempio: Consideriamo il cammino chiuso $\gamma_k : I \to \mathbb{C} - \{0\}$ tale che $\gamma_k(t) = e^{2\pi it}$, il quale percorre $k$ volte la circonferenza unitaria in senso antiorario: se $|z| < 1 \Rightarrow I(\gamma_k, z) = k$, altrimenti, se $|z| > 1 \Rightarrow I(\gamma_k, z) = 0$.

**Proposizione 1.0.24** *Consideriamo i cammini $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{C} - \{0\}$ e consideriamo il cammino:*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1\gamma_2 : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{0\} \\ & t & \longmapsto & \gamma_1(t)\gamma_2(t) \end{array}$$

*allora* $I(\gamma_1\gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$.
*Inoltre, se* $|\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$ *per ogni* $t$ *e*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1+\gamma_2: & I & \longrightarrow & \mathbb{C}-\{0\} \\ & t & \longmapsto & \gamma_1(t)+\gamma_2(t) \end{array}$$

*allora* $I(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0)$.

*Dimostrazione:* Siano $f_1$ e $f_2$ due primitive di $\frac{1}{z}dz$ tali che $e^{f_1(t)} = \gamma_1(t)$ e $e^{f_2(t)} = \gamma_2(t)$, allora, detta $f = f_1 + f_2$, vale $e^{f(t)} = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Abbiamo dunque: $I(\gamma_1\gamma_2, 0) = \frac{f(1)-f(0)}{2\pi i} = \frac{f_1(1)-f_1(0)}{2\pi i} + \frac{f_2(1)-f_2(0)}{2\pi i} = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$
Consideriamo il cammino $\gamma_1 + \gamma_2$ e riscriviamolo come $\gamma_1(t) + \gamma_2(t) = \gamma_1(t)(1 + \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)})$. Il cammino $\sigma = 1 + \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}$ è omotopicamente equivalente al cammino dato dalla circonferenza centrata in 1 di raggio $r < 1 \Rightarrow 0$ è un punto esterno a $\sigma$ e dunque $I(\sigma, 0) = 0$. Pe il punto precedente si ha $I(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\sigma, 0) = I(\gamma_1, 0)$.

$\bowtie$

Nella proposizione seguente consideriamo il bordo del rettangolo $\partial R$ $s > 0$ percorso sempre in senso antiorario benché valga $\int_{\partial R \text{ antiorario}} \omega = 0 \Rightarrow \int_{\partial R \text{ orario}} \omega = 0$.

**Proposizione 1.0.25** *Data* $\omega$ *forma differenziale in* $U$ *disco aperto contenuto in* $\mathbb{C}$, *se* $\int_{\partial R} \omega = 0$ *per ogni* $R$ *rettangolo contenuto in* $U$, *allora* $\omega$ *è esatta in* $U$.

*Dimostrazione:* da fare

$\bowtie$

**Corollario 1.0.26** *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}$ *aperto e* $\omega$ *una forma differenziale in* $U$, *se* $\int_{\partial R} \omega = 0$ *per ogni* $R$ *rettangolo contenuto in* $U$, *allora* $\omega$ *è chiusa.*

*Dimostrazione:* $\omega$ è esatta in ogni disco, ovvero è localmente esatta, cioè è chiusa.

$\bowtie$

**Teorema 1.0.27 (Teorema di Cauchy)** *Sia* $U$ *un aperto di* $\mathbb{C}$ *e* $f : U \to \mathbb{C}$ *olomorfa, allora la forma differenziale* $\omega = f(z)dz$ *è chiusa.*

*Dimostrazione:* Ci basta mostrare che per ogni rettangolo $R \subseteq U$, $\int_{\partial R} \omega = 0$ e poi applicare il corollario precedente. Prendiamo dunque un rettangolo $R \subseteq U$ e dividiamolo in quattro rettangoli tramite i punti medi di ogni lato (verso di percorrenza antiorario). $\alpha(R) = \int_{\partial R} \omega = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} \omega \Rightarrow |\alpha(R)| \leq \sum_{i=1}^{4} |\alpha(R_i)|$ e ciò ci assicura che almeno uno dei quattro $R_i$ soddisfa $|\alpha(R_i)| \geq \frac{1}{4}|\alpha(R)|$. Denotiamo tale $R_i$ con $R^{(1)}$ e applichiamo lo stesso procedimento trovando un $R^{(2)}$ tale che $|\alpha(R^{(2)})| \geq \frac{1}{4}|\alpha(R^{(1)})|$. Iterando il procedimento troveremo una successione di rettangoli $R \supseteq R^{(1)} \supseteq R^{(2)} \supseteq ...$ tale che $|\alpha(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4}|\alpha(R^{(k-1)})| \geq \frac{1}{4^2}|\alpha(R^{(k-2)})| \geq ... \geq \frac{1}{4^k}|\alpha(R)|$. Sia adesso $C^{(k)}$ il centro di $R^{(k)}$: la successione di punti $C^{(k)}$ è di Cauchy, infatti il diametro (lunghezza della diagonale) tende a 0 e dunque fissato $\varepsilon > 0$ prendiamo $N$ tale che diam$R^{(N)} < \varepsilon \Rightarrow |C^{(M_1)} - C^{(M_2)}| <$diam$R^{(N)} < \varepsilon$ per ogni $M_1, M_2 > N$. Sia allora $z_0 = \lim_{k\to\infty} C^{(k)}$ (essendo $C^{(i)}$ di Cauchy ammette limite); si ha $z_0 \in \bigcap_n R^{(n)}$ e, visto che diam$(R^{(N)} \to 0$, allora $\bigcap_n R^{(n)}$ può contenere al più un punto $\Rightarrow z_0 = \bigcap_n R^{(n)}$. Per ipotesi $f$ è olomorfa in $z_0$, cioè possiamo scrivere in un intorno di $z_0$ $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)(z - z_0)$ con $r(z) \to 0$ per $z \to z_0$; allora $\alpha(R^{(k)}) = f(z_0)\int_{\partial R^{(k)}} dz + f'(z_0)\int_{\partial R^{(k)}}(z - z_0)dz + \int_{\partial R^{(k)}} r(z)(z - z_0)dz$. Inoltre $|\alpha(R)| \leq 4^k|\alpha(R^{(k)})| \leq 4^k l(\partial R^{(k)}) max_{z\in R^{(k)}}(|r(z)||z - z_0|) = 2^k l(\partial R) diag(R^{(k)}) max_{z\in R^{(k)}}(r(z)) = l(\partial R) diag(R) max_{z\in R^{(k)}}(r(z))$. Facendo ora tendere $k \to \infty, z \to z_0 \Rightarrow max(r(z)) \to 0$ e dunque $\alpha(R) = 0$.

$\bowtie$

**Corollario 1.0.28** *Una funzione olomorfa ammette localmente primitiva olomorfa.*

*Dimostrazione:* L'esistenza della primitiva locale deriva dal teorema precedente e dalla definizione di forma chiusa; è inoltre olomorfa in quanto ha $f$ come derivata.

$\bowtie$

**Corollario 1.0.29** *Data $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni cammino $\gamma$ omotopo al cammino costante in $U$ ($\gamma \sim 0$).*

*Dimostrazione:* $f$ olomorfa $\Rightarrow \omega = f(z)dz$ chiusa $\Rightarrow \int_\gamma \omega = \int_0 \omega = 0$.

$\bowtie$

**Teorema 1.0.30 (Teorema di Cauchy, forma forte)** *Sia $U$ un aperto di $\mathbb{C}$, $a \in U$ un punto, $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa in $U - \{a\}$ (si estende ad un numero finito di punti) e continua su tutto $U$, allora $\omega = f(z)dz$ è chiusa.*

*Dimostrazione:* Ancora una volta ci basta mostrare che $\int_{\partial R} \omega = 0$ per ogni $R$ rettangolo. Consideriamo la retta $l$ parallela all'asse $x$ e passante per $a$; abbiamo tre casi:

$R \cap l = \emptyset$**)** Si procede come sopra;

$R \cap l =$ **lato del rettangolo)** Approssimiamo $R$ con rettangoli di vertici $a + \varepsilon, b + \varepsilon, c, d$ e allora, per quanto detto nella dimostrazione del primo teorema di Cauchy, $\int_{\partial R} \omega = 0$ e per $\varepsilon \to 0$ $\int_{\partial R_\varepsilon} \omega \to \int_{\partial R} \omega$ (formalmente, per far vedere tale limite, si passa ai moduli e alle disuguaglianze);

$R$ **è tagliato dalla retta** $l$**)** Si formano due rettangoli $R_1, R_2$ e dunque $\int_{\partial R} \omega = \int_{\partial R_1} \omega + \int_{\partial R_2} \omega = 0$ per il caso 2 appena visto.

$\bowtie$

**Teorema 1.0.31 (Formula dell'integrale di Cauchy)** *Sia $f$ un'applicazione olomorfa in un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ e sia $a$ un punto di $U$; sia inoltre $\gamma : I \to U - \{a\}$ un cammino chiuso omotopicamente equivalente al cammino che vale sempre $\gamma(0)$ in $U - \{a\}$, allora*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i I(\gamma, a)} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

*Dimostrazione:* Definiamo la funzione

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & z \neq a \\ f'(a) & z = a \end{cases}$$

La funzione $g(z)$ è continua poiché $f$ è olomorfa; è olomorfa poiché rappresentata da funzioni olomorfe e al denominatore è diversa da 0 in $U - \{a\}$. Possiamo applicare Cauchy in forma forte ($\gamma$ è omotopicamente equivalente al cammino banale intorno ad $a$):

$$\int_\gamma g(z)dz = 0 = \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = -f(a) \int_\gamma \frac{1}{z - a} dz + \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

e dunque:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i I(\gamma, a)} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

$\bowtie$

Esercizio: Calcolare gli integrali: $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$ e $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2 - 1} dz$. Risolvimi

# Capitolo 2

# Serie formali e funzioni analitiche

**Definizione 2.1** *Una espressione nella variabile $x$ della forma $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ con $a_k \in \mathbb{C}$ si dice **serie formale**. L'insieme delle serie formali si indica con $\mathbb{C}[[x]]$.*

**Operazioni tra serie formali:**

**Somma:** $(\sum_k a_k x^k) + (\sum_k b_k x^k) = \sum_k c_k x^k$ con $c_k = a_k + b_k$;

**Esistenza dello 0:** Prende il nome di serie nulla la serie $\sum_k 0x^k$;

**Moltiplicazione per scalare:** $\lambda \sum_k a_k x^k = \sum_k \lambda a_k x^k$ con $\lambda \in \mathbb{C}$;

**Moltiplicazione tra serie formali:** $(\sum_k a_k x^k)(\sum_k b_k x^k) = \sum_k d_k x^k$ con $d_k = \sum_{i=1}^k a_i b_{k-i}$;

**Esistenza dell'1:** $1 = 1x^0 + \sum_{k\geq 1} 0x^k$.

Notiamo che con le operazioni appenda definite $\mathbb{C}[[x]]$ è un'algebra che contiene $\mathbb{C}[x]$ come sottoalgebra. Per come è definito il prodotto $\mathbb{C}[[x]]$ è un dominio.

**Lemma 2.0.1** $s(x) = \sum_k a_k x^k$ *è invertibile in* $\mathbb{C}[[x]] \Leftrightarrow a_0 \neq 0$.

*Dimostrazione:* $\Rightarrow$) Se $s(x)$ è invertibile, allora $\exists(\sum_k b_k x^k)$ tale che $(\sum_k a_k x^k)(\sum_k b_k x^k) = 1 \Rightarrow a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0$
$\Leftarrow$) Assumiamo che $a_0 \neq 0$. La serie $s(x)^{-1}$ per esistere deve essere tale che

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare che di cui si può trovare soluzione risolvendo in ordine le equazioni e dunque $s(x)$ è invertibile.

$\bowtie$

Esempio: $(1-x) \in \mathbb{C}[[x]]$ è invertibile come serie formale: $(1-x)^{-1} = 1 + x + ... + x^k + ...$

**Definizione 2.2** *Il campo delle frazioni (o dei quozienti) dell'anello delle serie formali si indica con $\mathbb{C}((x))$ e i suoi elementi si dicono **serie di Laurant formali** nella variabile $x$.*

**Lemma 2.0.2** *Ogni elemento non nullo $S(x) \in \mathbb{C}((x))$ si può esprimere in modo unico nella forma $S(x) = x^v(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...)$ con $v \in \mathbb{Z}$ e $a_0 \neq 0$.*

*Dimostrazione:* Sia $S(x) = \frac{b_0+b_1x+b_2x^2+...}{c_0+c_1x+c_2x^2+...}$ e sia $h = min\{k|c_k \neq 0\}$. Per il lemma precedente sappiamo dunque che $c_h + c_{h+1}x + ...$ è invertibile in $\mathbb{C}[[x]]$. Possiamo dunque scrivere $S(x) = x^{-h}(b_0+b_1x+...)(c_h+c_{h+1}x+...)^{-1}$, cioè come il prodotto di due serie formali per $x^{-h}$. Svolgendo il prodotto si ottiene $S(x) = x^{-h}(x^k(a_0 + a_1x + ...))$ con $x^k$ potenza più bassa con coefficiente diverso da 0. L'unicità segue banalmente.

$\bowtie$

Ogni serie di Laurent meromorfa $S(x)$ si può scrivere in modo unico come una serie di potenza in $x$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$ avente solo un numero finito di termini con esponenti negativi cioè: $S(x) = a_{-m}x^{-m} + ... + a_{-1}x^{-1} + P(x)$ con $m \in \mathbb{N}$, $a_{-m} \neq 0$ e $P(x) \in \mathbb{C}[[x]]$. $P(x)$ è detta **parte principale**. Inoltre l'intero $v$ del lemma è detto **ordine** della serie $S(x)$ e si indica con $o(S)$. Poniamo per definizione $o(0) = \infty$ dove 0 è la serie nulla.

**Proprietà dell'ordine:** Date $S, T$ serie di Laurent:

1. $o(S \cdot T) = o(S) + o(T)$;
2. $o(S \pm T) \geq mino(S), o(T)$ e vale l'uguale se $o(S) \neq o(T)$;
3. $S(x) \in \mathbb{C}[[x]] \Leftrightarrow o(S) \geq 0$;
4. $o(S^{-1}) = -o(S)$.

**Definizione 2.3** *Siano $S(x), T(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ con $o(T) \geq 1$ cioè $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_kx^k$ e $T(x) = \sum_{k\geq 1} b_kx^k$. Definiamo* ***composizione*** *di $S$ con $T$ la serie formale:*

$$(S \circ T)(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(T(x))^k = \sum_{k\geq 0} a_k(\sum_{j\geq 1} b_jx^j)^k$$

La composizione è ben definita poiché $\forall k \geq 0$, $o(T^k) \geq k$ $(o(T) \geq 1)$ e dunque $\forall k \geq 0$ il coefficiente di $x^k$ in $S \circ T$ è somma di un numero finito di termini.

**Definizione 2.4** *Sia $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_kx^k \in \mathbb{C}[[x]]$; definiamo la sua* ***serie derivata*** *come la serie formale $S'(x) = \sum_{k\geq 1} ka_kx^{k-1}$.*

Osservazione: Per il momento dobbiamo intendere la scrittura di $S'(x)$ solo come una definizione senza legami con la definizione di derivata.

La serie che si ottiene iterando il processo di serie derivata $k$ volte si indica con $S^{(k)}(x) = k!a_k +$ termini di grado positivo. Da questo di ricava che il coefficiente $k$-esimo della serie $S(x)$: infatti $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$

Data una serie formale, vorremmo valutarla in punti $z \in \mathbb{C}$ per ottenere una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Sia dunque $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_kx^k$: la valutazione $S(z_0)$ è un numero complesso se la serie di potenza converge, ovvero se esiste $l$ finito tale che $\sum_{k\geq 0} a_kz_0^k = l$.

Diamo adesso qualche richiamo sulle serie di potenza, sulle successioni e serie di funzioni:

**Definizione 2.5** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ e sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione. Definiamo $||f|| = \sup_{x\in U} |f(x)|$* ***norma*** *di $f$.*

Osservazione: Se $f, g$ sono limitate, allora: $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ e dato $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow ||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||$. In pratica $|| \cdot ||$ definisce una norma sullo spazio vettoriale delle funzioni limitate da $U$ in $\mathbb{C}$.

**Definizione 2.6** *Sia $\{f_n : U \to \mathbb{C}\}$ successione di funzioni; la successione* ***converge uniformemente*** *in $U$ se $\exists f : U \to \mathbb{C}$ tale che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N >> 0$ tale che $||f_n - f|| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.*

**Lemma 2.0.3** *Il limite uniforme di funzioni continue è continuo.*

*Dimostrazione:* Già fatta.

$\bowtie$

**Definizione 2.7** *Sia $\{f_n : U \to \mathbb{C}\}$ successione di funzioni; diciamo che la serie di funzioni $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$* ***converge uniformemente*** *in $U$ se la successione delle somme parziali $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformemente. La serie di funzioni $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$* ***converge totalmente*** *in $U$ se la serie $\sum_{k\geq 0} ||f_k||$ converge.*

Osservazione: Se $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$ converge totalmente in $U$ allora:

1. $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$ converge assolutamente in $U$ ($\forall x \in U$);
2. $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$ converge uniformemente in $U$.

Sia $S(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$; se la valutiamo otteniamo una serie di funzioni $S(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$, ma dato che le funzioni sono monomi, questa è una serie di potenza.

**Teorema 2.0.4** *Sia $S(x)$ una serie formale $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$, allora $\exists \rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tale che:*

1. *La serie di potenze $S(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ converge totalmente nella palla chiusa centrata in 0 e raggio $r$ con $r < \rho$, ovvero $S(z)$ converge totalmente in $\overline{B(0,r)}$ per ogni $r < \rho$ (e quindi converge assolutamente in $B(0,\rho)$)*
2. *La serie non converge per $|z| > \rho$.*

*Dimostrazione:* Già vista ad analisi 1.

$\bowtie$

**Definizione 2.8** *Il numero $\rho$ prende il nome di* ***raggio di convergenza****.*

**Teorema 2.0.5 (Teorema di Hadamard)** *Il raggio di convergenza $\rho$ di una serie di potenza si ottiene come $\rho = \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}}$*

*Dimostrazione:* Sia $t = \limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}$ e supponiamo $t \neq 0, \infty$. Per definizione di lim sup sappiamo che per $k$ abbastanza grande $|a_k| \leq t^k$. Fissiamo $z$ tale che $|z| < \frac{1}{t}$ e poniamo $c = t|z| \Rightarrow c < 1$ e $|a_k z^k| \leq |t^k \frac{c^k}{t^k}| = c^k$. Adesso la serie $\sum_k c^k$ converge (serie geometrica) e dunque $\rho \geq \frac{1}{t}$. Mostriamo l'altra disuguaglianza: $\forall \varepsilon > 0$ esistono infiniti $k$ tali che $\sqrt[k]{|a_k|} \geq t - \varepsilon \Rightarrow$ Per $|z| = \frac{1}{t-\varepsilon}$, $|a_k z^k| \geq 1$ per infiniti $k$ e dunque la serie $\sum_k a_k z^k$ non converge $\Rightarrow \rho \leq \frac{1}{t}$ e dunque la tesi.

$\bowtie$

**Definizione 2.9** *La palla $B(0,\rho)$ è detto* ***disco di convergenza****.*

Osservazione: I teoremi dimostrati ci dicono che dentro al disco c'è convergenza, fuori no e non sappiamo nulla sul bordo.

Esempi:

- $\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k^2}$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e pertanto converge assolutamente per tutti gli $z$ di norma 1. Inoltre sul bordo converge perché la serie dei valori assoluti è una serie armonica generalizzata;
- $\sum_{k\geq 0} z^k$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$, ma diverge assolutamente $\forall z$ tale che $|z| = 1$;

- $\sum_{k\geq 0} z^{2^k}$, studiare $\rho$ e convergenza lungo il bordo.

**Proposizione 2.0.6** *Siano $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ con raggio di convergenza $\rho \geq 0$, allora $S(x) = A(x) + B(x)$ e $P(x) = A(x)B(x)$ hanno raggio di convergenza maggiore uguale a $\rho$. Inoltre, per $|z| < \rho$, $S(z) = A(z)B(z)$ e $P(z) = A(z)B(z)$.*

*Dimostrazione:* Siano $A(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k, B(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k, S(x) = \sum_{k\geq 0} c_k x^k$ con $c_k = a_k + b_k$ e $P(x) = \sum_{k\geq 0} d_k x^k$ con $d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. Chiamiamo $\gamma_k = |a_k| + |b_k|$ e $\delta_k = \sum_{i=0}^{k} |a_i||b_{k-i}|$. Abbiamo quindi che $|c_k| \leq \gamma_k$ e $|d_k| \leq \delta_k$ per la differenza triangolare. $\forall r \in \mathbb{R}$, $r < \rho$ vale che $\sum_{k\geq 0} |a_k| r^k, \sum_{k\geq 0} |b_k| r^k$ convergono e dunque $\sum_{k\geq 0} \gamma_k r^k$ converge. Allo stesso modo $\sum_{k\geq 0} \delta_k r^k$ converge e dunque per confronto $S(r)$ e $P(r)$ convergono assolutamente per ogni $r < \rho$ e dunque il raggio di convergenza di $P(x)$ e $S(x)$ è maggiore uguale di $\rho$.

**Teorema 2.0.7** *Siano $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$, $T(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$, $(S \circ T)(x) = U(x) = \sum_{k\geq 0} a_k (T(x)^k = \sum_{k\geq 0} u_k (\sum_{j\geq 1} b_j x^j)^k$; se $\rho(S) > 0$ e $\rho(T) > 0$, allora $\rho(U) > 0$. Più precisamente esiste $\bar{r} > 0$ tale che $\sum_{k\geq 1} |b_k| \bar{r}^k < \rho(S)$. Inoltre $\rho(U) \geq \bar{r}$ e $\forall z \in \overline{B(0, \bar{r})}$ si ha che $U(z) = S(T(z))$.*

*Dimostrazione:* Per $r$ sufficientemente piccolo $\sum_{k\geq 1} |b_k| r^k$ converge ed anche $\sum_{k\geq 1} |b_k| r^{k-1}$ converge e dunque $\sum_{k\geq 1} |b_k| r^k = r \sum_{k\geq 1} |b_k| r^{k-1} \xrightarrow{r\to 0} 0$ e pertanto esiste $\bar{r} > 0$ tale che $\sum_{k\geq 1} |b_k| \bar{r}^k < \rho(S) \Rightarrow \sum_{k\geq 0} |a_k| (\sum_{j\geq 1} |b_j| \bar{r}^j)^k$ converge. I coefficienti in modulo di $U(x)$ sono determinati dai coefficienti dell'ultima serie scritta, dunque $\rho(U) \geq \bar{r}$.
Dobbiamo ora mostrare che $\forall z \in \overline{B(0, \bar{r})}$ si ha $U(z) = S(T(z))$, ma, per quanto visto, la formula è valida se $S$ è un polinomio; consideriamo quindi le somme parziali: $S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$. Si ha $S_N(T(z)) = (S_N \circ T)(z)$. Ogni coefficiente in modulo della serie $U(z) - S_N(T(z))$ è dominato dal corrispondente coefficiente della serie $\sum_{k\geq N} |a_k| (\sum_{j\geq 1} |b_j| \bar{r}^j)^k$ e quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0$ tale che $\forall N \geq N_0$ abbiamo $|U(z) - S_N(T(z))| < \varepsilon$ per ogni $z \in \overline{B(0, \bar{r})}$. In ogni palla chiusa contenuta in $B(0, \rho(S))$ la successione delle funzioni $S_N$ tende uniformemente ad $S \Rightarrow \exists N_1$ tale che $\forall N \geq N_1$ $|S(T(z)) - S_N(T(z))| < \varepsilon$ $\forall z \in \overline{B(0, \bar{r})}$. Prendo ora $N \geq max\{N_0, N_1\}$ e ho $|U(z) - S(T(z))| \leq |U(z) - S_N(T(z))| + |S_N(T(z)) - S(T(z))| < 2\varepsilon$ $\forall z \in \overline{B(0, \bar{r})}$.

$\bowtie$

**Corollario 2.0.8** *Sia $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$, $a_0 \neq 0$; se $\rho(S) \neq 0$, allora $\rho(S^{-1}) \neq 0$.*

*Dimostrazione:* Possiamo assumere $a_0 = 1$ e dunque $S(x) = 1 + a_1 x + ... = 1 - S_1(x)$ con $o(S_1) \geq 1$. Vale dunque che $S^{-1}(x) = \frac{1}{1 - S_1(x)} = 1 + S_1(x) + S_1^2(x) + ... = T(S_1(x))$ con $T(x) = \sum_{k\geq 0} x^k$. Poiché $\rho(T) = 1 \neq 0 \Rightarrow \rho(S^{-1}) \neq 0$ per il teorema precedente

$\bowtie$

**Teorema 2.0.9** *Sia $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$ e sia $S'(x) = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}$ la sua serie derivata; allora $\rho(S') = \rho(S) \neq 0$ e $\forall z \in B(0, \rho(S))$ si ha*

$$S'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}$$

*Dimostrazione:* Notiamo prima di tutto che se $z \in B(0, \rho(S))$ e $h$ è sufficientemente piccolo, anche $z + h \in B(0, \rho(S))$ e quindi ha senso parlare di $S(z + h)$.
$\limsup_k |k a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup_k |k|^{\frac{1}{k}} \limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\rho(S)}$ quindi $\rho(S) = \rho(S')$. Scegliamo adesso $r < \rho(S)$ tale che $z, z+h \in \overline{B(0, r)} \Rightarrow S(z+h) = \sum_{k\geq 0} a_k (z+h)^k = \sum_{k\geq 0} a_k (z^k + k z^{k-1} h + h^2 p_k(z, h))$ con $p_k(z, h) = \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} h^{j-2} z^{k-j}$. Per $|h| < \delta$ si ha $|p_k(z, h)| < p_k(r, \delta)$, quindi $\frac{S(z+h) - S(z)}{h} -$

$S'(z) = \sum_{k\geq 2} ha_k p_k(z,h)$ converge (poiché convergono le serie a sinistra). Prendiamo quindi il modulo e abbiamo $|\frac{S(z+h)-S(z)}{h} - S'(z)| = |h\sum_{k\geq 2} a_k p_k(z,h)| \leq |h|\sum_{k\geq 2}|a_k||p_k(z,h)| \leq |h|\sum_{k\geq 2}|a_k|p_k(r,\delta) \xrightarrow{h\to 0} 0$. perché limitata ultima serie?

$\bowtie$

**Corollario 2.0.10** *La serie $S$ definisce una funzione olomorfa (e continua) in $B(0,\rho(S))$. La derivata di tale funzione è la funzione definita dalla serie $S'$.*

*Dimostrazione:* Segue direttamente dal teorema precedente.

$\bowtie$

**Definizione 2.10** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, una funzione $f: U \to \mathbb{C}$ si dice **analitica in** $z_0 \in U$ se esiste una serie di potenze $\sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$ convergente in $B(z_0,r)$ (convergenza assoluta) per qualche $r > 0$ e tale che in $B(z_0,r)$ si abbia $f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$. Diciamo che una funzione è **analitica** se è analitica in ogni punto di $U$.*

**Proprietà)** Vediamo alcune proprietà delle funzioni analitiche:

1. Se $f$ è analitica in $U$, allora $f$ è anche continua in $U$ (per limite uniforme di funzioni continue);
2. Se $f, g$ sono analitiche in $U$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ allora $f+g, fg, \lambda f$ sono analitiche in $U$ e $\frac{f}{g}$ è analitica in $U_0 = \{z \in U | g(z) \neq 0\}$ (segue dalle operazioni sulle serie convergenti);
3. Sia $V \subseteq \mathbb{C}$ e $f: U \to \mathbb{C}$, $g: V \to \mathbb{C}$, $g(V) \subseteq U$ allora $f \circ g$ è analitica in $V$:
   Sia $z_0 \in V$ e sia $w_0 = g(z_0)$, allora in un intorno di $z_0$ si ha $g(z) = w_0 + \sum_{k\geq 1} a_k(z-z_0)^k$ e, in un intorno di $w_0$ si ha $f(w) = \sum_{j\geq 0} b_j(w-w_0)^j$ e posso sostituire $g(z) - w_0 = \sum_{k\geq 1} a_k(z-z_0)^k$ al posto di $(w-w_0)$ nella scrittura di $f$. Otteniamo in questo modo una serie assolutamente convergente a $f(g(z))$ in un intorno di $z_0$ (siamo riusciti a scrivere $f \circ g$ in forma analitica.

**Proposizione 2.0.11** *Sia $a \in \mathbb{C}$ e $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ una serie di potenze assolutamente convergente in $B(a,r)$, $r > 0$, allora la funzione $f: B(a,r) \to \mathbb{C}$ definita dalla serie è analitica in $B(a,r)$.*

*Dimostrazione:* Possiamo assumere che $a = 0$, cioè $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ in $B(0,r)$. Fissiamo $z_0 \in B(0,r)$ e $s > 0$ tale che $B(z_0,s) \subseteq B(0,r)$ (quindi $|z_0| + |z-z_0| < r$, $\forall z \in B(z_0,s)$). Posto $z = (z-z_0)+z_0$ otteniamo $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k((z-z_0)+z_0)^k = \sum_{k\geq 0} a_k(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(z-z_0)^j z_0^{k-j})$. Se $z \in B(z_0,s)$ si ha convergenza assoluta per ipotesi. $\Rightarrow \sum_{k\geq 0} a_k(|z-z_0|+|z_0|)^k$ converge assolutamente $\Rightarrow \sum_{k\geq 0} a_k(|z-z_0|+|z_0|)^k = \sum_{k\geq 0}|a_k|(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}|z-z_0|^j|z_0|^{k-j})$. Adesso $f(z) = \sum_{j\geq 0}(\sum_{k\geq j}\binom{k}{j}z_0^{k-j})(z-z_0)^j$ in $B(z_0,s) \Rightarrow f$ è analitica in $z_0$.

$\bowtie$

**Teorema 2.0.12** *Sia $f: U \to \mathbb{C}$ analitica in $U$, allora ammette derivata di ogni ordine che sono tutte funzioni analitiche (e quindi continue) in $U$.*

*Dimostrazione:* Fissiamo $z_0 \in U$, allora in una palla centrata in $z_0$ si ha $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$ quindi $f'(z) = \sum_{k\geq 1} ka_k(z-z_0)^{k-1}$. Iterando il procedimento si ha $f^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(z-z_0)^{k-n}$ e queste sono tutte analitiche (e quindi continue) in una palla centrata in $z_0$.

$\bowtie$

**Proposizione 2.0.13** *Sia $f$ una funzione analitica che ha uno sviluppo in serie in un disco $B(a,r)$, allora $f$ ammette una primitiva in $B(a,r)$.*

*Dimostrazione:* $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ in $B(a,r)$. La serie $\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1}(z-a)^{k+1} = (z-a)\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1}(z-a)^k$. Adesso $\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1}(z-a)^k$ converge assolutamente in $B(a,r)$ quindi $(z-a)\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1}(z-a)^k$ converge ad una funzione continua $g(z)$. Allora $g(z)$ è analitica in $B(a,r)$ e $g'(z) = f(z)$.

$\bowtie$

Esercizio: Trovare uno sviluppo in serie di potenza del ramo principale del logaritmo in un intorno di $z_0 = 1$.
*Soluzione:* $(Log(z))' = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{k\geq 0}(1-z)^k = \sum_{k\geq 0}(-1)^k(z-1)^k$ nella palla $B(1,1)$; essendo analitica, in questa palla ammette una primitiva che è $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^{k+1}$ e questa differisce da $Log(z)$ per una costante. Dato che entrambe si annullano in $z=1$ allora $Log(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^{k+1}$ in $B(1,1)$.

**Teorema 2.0.14** *Sia $f$ una funzione olomorfa in $U \subseteq \mathbb{C}$ tale che $U \supseteq B(z_0,r)$ con $z_0 \in U$ e $r > 0$, allora $f$ ammette una espressione in serie di potenze convergente in questa palla, ovvero $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$ con $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,s)} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi$, dove il bordo è percorso in senso antiorario e $0 < s < r$.*

*Dimostrazione:* Consideriamo il punto $z$ nella palla $B(z_0,r)$: allora vale la formula dell'integrale di Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,s} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ con $s$ tale che $||z-z_0|| < s < r$. Riscriviamo

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{1}{(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}) = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{k\geq 0}(\frac{z-z_0}{\xi-z_0})$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}| < 1$. Inoltre, per lo stesso motivo, possiamo scambiare la serie con l'integrale e pertanto:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,s} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k\geq 0}\int_{\partial B(z_0,s)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}(\frac{z-z_0}{\xi-z_0})^k d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k\geq 0}(z-z_0)^k\int_{\partial B(z_0,s)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}(\frac{1}{\xi-z_0})^k d\xi$$

dove l'integrale non dipende da $s$ e pertanto la formula vale in $B(z_0,r)$. Vale dunque che una funzione olomorfa in $B(z_0,r)$ è analitica nella palla.

$\bowtie$

**Corollario 2.0.15** *Sia $f$ una funzione olomorfa in $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto; allora $f$ è analitica in $U$, quindi ha derivate di ogni ordine tutte analitiche.*

*Dimostrazione:* Per ogni punto in $U$ troviamo una piccola palla tutta contenuta in $U$ e usiamo il teorema appena dimostrato.

$\bowtie$

Osservazione: Grazie al teorema precedente e al fatto che una funzione analitica ammete derivate di ogni ordine abbiamo dimostrato l'equivalenza su $\mathbb{C}$ tra funzioni analitiche o olomorfe.

Osservazione: Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. La funzione $f$ è $C^\infty$ ma non è analitica.

Osservazione: Lo sviluppo in serie di una funzione olomorfa in $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto dipende dal punto in cui viene centrato $z_0 \in U$; $f$ converge nella più grande palla aperta centrata in $z_0$ e contenuta in $U$, ma non converge negli altri punti. Ad esempio lo sviluppo in serie di $Log(z)$ intorno a $z_0 = 1$ non converge intorno al punto $i$ (non sta dentro $B(1,1)$.

Esercizio: Trovare uno sviluppo in serie di $Log(x)$ intorno al punto $i$: Risolvimi

**Teorema 2.0.16 (Disuguaglianza di Cauchy)** *Nelle ipotesi del teorema precedente vale che*

$$|a_k| \leq \frac{max_{\overline{B(z_0,r)}}|f|}{r^k}$$

*Dimostrazione:* $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$ e passando ai moduli e maggiorando ($l(\gamma) = 2\pi r$) si ha

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} max_{\overline{B(z_0,r)}} l(\gamma) \leq \frac{max_{\overline{B(z_0,r)}}|f|}{r^k}$$

$\bowtie$

Esercizio: Sia $f$ una funzione analitica in una palla $B(0,1)$ e tale che $||f(z)|| \leq 1$ $\forall z \in B(0,1)$. Dimostrare che $|f^{(k)}(0)| \leq k!$. Segue direttamente dal teorema precedente e dal fatto che $a_k k! = f^{(k)}(0)$.

**Definizione 2.11** *Una funzione $f$ olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ si dice* ***intera****.*

**Teorema 2.0.17 (Teorema di Liouville)** *Le uniche funzioni intere e limitate sono le costanti.*

*Dimostrazione:* Sia $f$ una funzione intera, dunque esiste uno sviluppo in serie centrato nell'origine $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ con raggio di convergenza infinito. Inoltre, poiché $f$ è limitata $\exists B \geq 0$ tale che $|f(z)| \leq B$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Usiamo adesso la disuguaglianza di Cauchy e dunque $|a_k| \leq \frac{B}{r^k}$ per ogni $r > 0$ e per ogni $k \geq 0$. Non appena $k$ è maggiore o uguale di 1 è sufficiente scegliere $r$ arbitrariamente grande per far si che $|a_k| \to 0$ e dunque $f = a_0$ costante.

$\bowtie$

**Corollario 2.0.18** $\cos(z)$ *e* $\sin(z)$ *non sono funzioni limitate sui complessi.*

*Dimostrazione:* Sono funzioni analitiche, ma non costanti e dunque non possono essere limitate. Per una verifica diretta basta considerare $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ e scegliere $z = iy$ con $y$ reale e far tendere $y$ all'infinito.

$\bowtie$

**Corollario 2.0.19** *Una funzione intera e non costante ha immagine densa in $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione:* Sia $f$ intera e non costante e assumiamo che l'immagine di $f$ non sia densa: allora $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ e $s > 0, s \in \mathbb{R}$ tale che $|f(s) - \alpha| > s$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, allora $g(z) = \frac{1}{f(z)-\alpha}$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ dunque è intera e soddisfa $|g(z)| < \frac{1}{s}$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow g$ è intera e limitata, dunque è costante e dunque $f$ è costante, assurdo.

$\bowtie$

**Teorema 2.0.20 (Teorema fondamentale dell'algebra)** $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ *con $a_n \neq 0$ e $n > 0$. Allora $f$ ammette almeno una radice complessa.*

*Dimostrazione:* Se $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, allora $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ è intera. Posso scrivere $f(z) = z^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n})$ per $z \neq 0$. Adesso $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = +\infty$ e dunque $\lim_{|z| \to +\infty} = 0$ e dunque esiste $r > 0$ tale che $|g(z)| \leq max_{\xi \in B(0,r)} |g(z)|$ cioè $g$ è limitata. Allora per Louville $g$ è costante e quindi anche $f$ è costante, assurdo.

$\bowtie$

Sia $f$ una funzione analitica in un intorno di $a \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z-a)^k$ in un intorno di $a$. Se $f$ non è identicamente nulla i coefficienti non sono tutti uguali a 0 e pertanto possiamo dare la seguente:

**Definizione 2.12** *Data $f$ analitica si definisce* ***ordine di*** *$f(z)$* ***in*** *$a$ $O_f(a) = min\{k \geq 0 | a_k \neq 0\}$ che è anche l'ordine della serie formale $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$.*

**Proprietà dell'ordine:** data $f : U \to \mathbb{C}$ non costante e con $a \in U$, allora:

1. $O_f(a) > 0 \Leftrightarrow a$ è uno zero di $f$ $(f(a) = 0)$;

2. $O_{f'}(a) = O_{f-f(a)}(a) - 1$;

3. Esiste sempre un intorno aperto $A \subseteq U$ di $a$ tale che $O_f(z) = 0 \; \forall z \in A - \{a\}$;

Le prime due implicazioni basta svolgere i conti. Vediamo la terza: se $f(a) \neq 0$ cioè $O_f(a) = 0$ allora la tesi è vera per continuità. Se $f(a) = 0$, allora $O_f(a) = h > 0$; scriviamo $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z-a)^k = (z-a)^h \sum_{k \geq 0} a_k(z-a)^{k-h}$. La funzione $\sum_{k \geq 0} a_k(z-a)^{k-h}$ converge assolutamente in $B(a,s)$ per qualche $s$. Allora $O_g(a) = 0$ e dunque per continuità $g(z) \neq 0$ in un intorno $A$ di $a$. Dunque $f(z) = (z-a)^h g(z) \neq 0$ in $A - \{a\}$ cioè $O_f(z) = 0 \; \forall z \in A - \{a\}$.

**Teorema 2.0.21 (Principio del prolungamento analitico)** *Sia $U$ un aperto connesso di $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ e $f : U \to \mathbb{C}$ analitica. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$f^{(k)}(z_0) = 0 \; \forall k \geq 0$;*

2. *$f$ è identicamente nulla in un intorno di $z_0$;*

3. *$f$ è identicamente nulla su tutto $U$.*

*Dimostrazione:*

$1 \Rightarrow 2)$ $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z-z_0)^k$ in un intorno di $z_0$ con $a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$;

$2 \Rightarrow 1)$ Ovvio (una funzione costante ha derivata nulla);

$3 \Rightarrow 1)$ Ovvio

$2 \Rightarrow 3)$ Consideriamo $A = \{z \in U | f$ è identicamente nulla in un intorno di $z\}$ che è aperto per definizione e non vuoto poiché contiene $z_0$; basta allora dimostrare che $A$ è anche chiuso poiché $U$ è connesso; sia $z \in \overline{A}$, esiste una successione di punti $\{z_n | z_n \in A\}$ tali che $z_n \to z$. Dato che $(2 \Rightarrow 1)$ si ha che $f^{(k)}(z_n) = 0$ per ogni $n$ e per ogni $k \geq 0$. Le derivate di $f$ sono analitiche e dunque continue e dunque $f^{(k)}(z) = 0$ per ogni $k \geq 0$ e quindi $(1 \Rightarrow 2)$ $f$ è identicamente nulla in un intorno di $z$ e dunque $z \in A$. Dato che $\overline{A} = A$ si ha la tesi.

$\bowtie$

**Corollario 2.0.22** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $z_0 \in U$, $f, g : U \to \mathbb{C}$ funzioni analitiche. Se $f, g$ coincidono in un intorno di $z_0$, allora coincidono su tutto $U$.*

*Dimostrazione:* Basta applicare il teorema precedente a $f - g$.

$\bowtie$

**Teorema 2.0.23** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso e sia $f : U \to \mathbb{C}$ funzione analitica non identicamente nulla, allora l'insieme degli zeri di $f$ è discreto.*

*Dimostrazione:* Supponiamo l'esistenza di $a \in U$ tale che $f(a) = 0$ (altrimenti non c'è nulla da dimostrare). Essendo $f$ non identicamente nulla, non lo è nemmeno in nessun intorno aperto del punto $a$ per il teorema precedente. Allora, per quanto visto nelle proprietà, esiste $A \subseteq U$ intorno di $a$ tale che $O_f(z) = 0$ per ogni $z \in A - \{a\}$ (cioè $f(z) \neq 0$ $\forall z \in A - \{a\}$). Allora nell'insieme degli zeri di $f$ ogni punto è aperto ($A \cap \{zeri\}$ è aperto ed è uguale a $\{a\}$), ovvero l'insieme è discreto.

$\bowtie$

**Corollario 2.0.24** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $f, g$ analitiche in $U$, allora $S = \{z \in U | f(z) = g(z)\}$ se non è vuoto è discreto o è uguale a $U$.*

*Dimostrazione:* Segue direttamente dai due teoremi precedenti.

$\bowtie$

Esercizio: Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso e sia $f : U \to \mathbb{C}$ analitica tale che $f(z) \neq 0$ $\forall z \in U$ allora

1. Esiste una funzione analitica $h : U \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) = e^{h(z)}$ per ogni $z \in U$;
2. Esiste una funzione analitica $H : U \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) = H(z)^n$ per ogni $z \in U$, $\forall n \in N$.

*Svolgimento:*

1. Consideriamo $(Log(f))' = \frac{f'}{f} : U \to \mathbb{C}$ analitica (composizione di funzioni analitiche) e sia $F : U \to \mathbb{C}$ una sua primitiva. Adesso $G(z) = \frac{e^{F(z)}}{f(z)}$ è analitica e $G'(z) = \frac{F'(z)e^{F(z)}f(z) - f'(z)e^{F(z)}}{(f(z))^2} = 0 \Rightarrow e^{F(z)} = cf(z)$ con $c \in \mathbb{C}$. Ponendo $c = e^{\lambda}$ e $h(z) = F(z) - \lambda$ si ha $e^{h(z)} = f(z)$;
2. Nelle notazioni precedenti basta considerare $H(z) = e^{\frac{h(z)}{n}}$.

Esercizio: Dimostrare l'esercizio precedente utilizzando i rivestimenti e l'ipotesi di semplice connessione

**Teorema 2.0.25 (Teorema dell'applicazione aperta)** *Siano $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione analitica non costante; allora $f$ è aperta.*

*Dimostrazione:* Dobbiamo mostrare che se $A \subseteq U$ è aperto e e $a \in A$, allora $f(A)$ contiene un intorno aperto di $f(a)$. Possiamo assumere $a = f(a) = 0$ (altrimenti trasliamo tutto), e scriviamo $f(z) = z^n(a_n + a_{n+1}z + ...)$ in $B(0, r)$ con $n > 0$ e $a_n \neq 0$ sviluppando in serie intorno allo 0. Posto $g(z) = a_n + a_{n+1}z + ...$, $g(z)$ non si annulla in 0 e dunque esiste $s > 0$ tale che $g(z)$ è non nulla $\forall z \in B(0, s)$ (continuità). Esiste allora $H : B(0, s) \to \mathbb{C}$ tale che $g(z) = H^n(z) \Rightarrow f(z) = (zH(z))^n = f_0^n$. Verifichiamo che $(f_0)'(0) \neq 0$ per poter applicare il teorema della funzione implicita ad $f_0$. $(f_0)'(z) = H(z) + zH'(z)$: valutando in 0 e ricordando che $a_n \neq 0$ si ha che la derivata non si annulla. Dunque $f_0$ è aperta in un intorno di 0. L'applicazione che manda $z \to z^n$ è un rivestimento e dunque una applicazione aperta. Quindi $f$ è aperta in un intorno di zero.

$\bowtie$

**Teorema 2.0.26 (Principio del massimo modulo)** *$U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso e $f : U \to \mathbb{C}$ analitica e supponiamo esista $z_0 \in U$ tale che $|f| : U \to \mathbb{R}$ ha un massimo locale (relativo) in $z_0$; allora $f$ è costante.*

*Dimostrazione:* Consideriamo la scrittura $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$ in un intorno di $z_0$ e usiamo il teorema della applicazione aperta. Se $f$ non è costante, allora $\forall U_0 \subseteq U$ intorno aperto di $z_0$, $f(U_0)$ è aperto $\Rightarrow f(U_0) \supseteq B(f(z_0), r) \Rightarrow f(U_0)$ contiene i punti che hanno norma maggiore della norma di $f(z_0) = a_0$ (ad esempio $f(z_0) + \varepsilon$) e dunque $z_0$ non è un massimo locale per la norma di $f$.

$\bowtie$

Osservazione: Sia $f : K \to \mathbb{C}$ analitica, non costante e con $K$ compatto, allora $|f|$ assume il suo massimo nei punti che sono sulla frontiera di $K$. non ho la connessione

Esercizio: Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $f : U \to \mathbb{C}$ analitica, se $\Re(f) : U \to \mathbb{R}$ ammette massimo locale in un punto $z_0 \in U$, allora $f$ è costante. risolvimi

**Teorema 2.0.27 (Lemma di Schwartz)** *Sia $D = B(0,1)$ disco unitario aperto e consideriamo $f : D \to D$ analitica tale che $f(0) = 0$, allora $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in D$ e $|f'(0)| \leq 1$. Inoltre, se $|f'(0)| = 1$ oppure $|f(z_0)| \leq |z_0|$ per qualche $z_0 \in D$, allora $f$ è una rotazione intorno all'origine.*

*Dimostrazione:* $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow g(z) = \frac{f(z)}{z}$ è analitica (sto soltanto abbassando di grado la serie di $f(z)$). Fissiamo $0 < r < 1$ e allora $\forall z \in \partial \overline{B(0,r)}$ si ha che $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ (poiché $|f(z)| < 1$ e $|z| = r$), ma allora per il principio del massimo modulo (per l'osservazione) la disuguaglianza vale anche all'interno della palla e dunque, facendo tendere $r$ a 1, otteniamo che $\forall z \in D$ $|g(z)| \leq 1 \Rightarrow |f'(z)| \leq |z|$; inoltre $f'(0) = g(0)$ e dunque $|f'(0)| < 1$.
Per la seconda parte se $\exists z_0 \in D$ tale che $|g(z_0)| = 1 \Rightarrow g$ è costante (principio del massimo modulo) e dunque $f(z) = \xi g(z)$ con $\xi \in \mathbb{C}$ e $|\xi| = 1$; cioè $\xi = e^{i\theta}$ e $f$ è una rotazione di angolo $\theta$.

$\bowtie$

# Capitolo 3

# Serie di Laurent

**Definizione 3.1** *Una espressione del tipo* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k x^k$ *con* $a_k \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ *si dice* ***serie di Laurant formale****. La serie di Laurent si dice* ***meromorfa*** *se ha solo un numero finito di indici tali che* $k < 0$ *e* $a_k \neq 0$.

Sia $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k x^k$ una serie di Laurent formale; dividiamo la sommatoria e otteniamo $f_1(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ con $f_1(z)$ funzione olomorfa in una palla centrata nell'origine $B(0, r_1)$ e con derivata $f_1'(z) = \sum_{k>0} k a_k z^{k-1}$. Definiamo adesso $g(u) = \sum_{k<0} a_k u^{-k}$ funzione olomorfa in un intorno dell'origine $B(0, \frac{1}{r_2})$. La sua derivata è $g'(u) = -\sum_{k<0} k a_k u^{-k-1}$. Definiamo dunque $f_2(z) = g(\frac{1}{z}) = \sum_{k<0} a_k z^k$ e quindi $f_2'(z) = -\frac{1}{z^2} g'(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2} \sum_{k<0} k a_k z^{k+1}$. $f_2(z)$ è una funzione olomorfa per $|z| > r_2$. Supponiamo adesso $r_2 < r_1$: abbiamo definito $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ e grazie alle considerazioni fatte la funzione $f(z)$ è ben definita e olomorfa nella corona circolare degli $z$ tali che $r_2 < |z| < r_1$. Inoltre la derivata risulta essere $f'(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k a_k z^{k-1}$.

**Definizione 3.2** *Nelle notazioni precedenti fissiamo* $0 \leq r_2 \leq r_1 \leq +\infty$ *e* $a \in \mathbb{C}$*; allora definiamo* $K = \{z \in \mathbb{C} | r_2 < |z - a| < r_1\}$ ***corona circolare****; inoltre una funzione* $f$ *definita in* $K$ *a valori in* $\mathbb{C}$ *si dice che* ***ammette uno sviluppo in serie di Laurent*** *in* $K$ *se esiste una serie di Laurent* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k$ *convergente ad* $f$ *in* $K$.

Osservazione: Se $f$ ammette uno sviluppo in serie di Laurent, allora $f$ è olomorfa in $K$.

**Teorema 3.0.1** *Sia* $K = \{z \in \mathbb{C} | r_2 < |z - a| < r_1\}$ *con* $0 \leq r_2 \leq r_1 \leq +\infty$ *corona circolare aperta. Sia* $f : K \to \mathbb{C}$ *olomorfa, allora* $f$ *ammette uno sviluppo in serie di Laurent in* $K$ *e tale sviluppo è unico.*

*Dimostrazione:* A meno di traslazioni possiamo supporre $a = 0$:

**Unicità)** Prendiamo lo sviluppo in serie di Laurent $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ e definiamo $f_1(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ in $B(0, r_1)$ e $f_2(z) = \sum_{k<0} a_k z^k$ con $|z| > r_2$ e tale che

$$\lim_{|z|>r_2, |z|\to+\infty} |f_2(z)| = 0$$

Supponiamo che esistano altre due funzioni $g_1, g_2$ con le stesse proprietà di $f_1, f_2$ e tali che $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ in $K$. Vale dunque che $f_1 - g_1 = f_2 - g_2$. Costruiamo adesso la funzione:

$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z) & z \in B(0, r_1) \\ f_2(z) - g_2(z) & |z| > r_2 \end{cases}$$

$h(z)$ è intera (olomorfa su tutto $\mathbb{C}$) e $\lim_{|z|\to+\infty} |h(z)| = 0$. Dunque $h(z)$ è limitata e intera e per il teorema di Louville $h$ è costante: $h = 0$ perché il limite è 0. Vale dunque che $f_1 = g_1$ e $f_2 = g_2$;

**Esistenza)** Fissiamo i numeri reali $\rho_2, \rho_2', \rho_1, \rho_1'$ tali che $r_2 < \rho_2' < \rho_2 < \rho_1 < \rho_1' < r_1$ e indichiamo con $\gamma_1 = \partial B(0, \rho_1')$ e $\gamma_2 = \partial B(0, \rho_2')$. Mostriamo la tesi per pezzi:

1. $\forall z \in \{z | \rho_2 \leq z \leq \rho_1\}$ vale la formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

*Dimostrazione:* Allegare disegno. Consideriamo la corona circolare in figura e scriviamo $z = \rho_0 e^{i\theta_0}$ con $\rho_2 < \rho_0 < \rho_1$ e consideriamo un settore circolare $\Sigma_\varepsilon$ $\forall 0 < \varepsilon < \pi$ dato da $\Sigma_\varepsilon = \{\rho e^{i\theta} | \rho_2' < \rho < \rho_1' \text{ e } \theta_0 - \varepsilon < \theta < \theta_0 + \varepsilon\}$ e indichiamo con $\Gamma_\varepsilon = \partial \Sigma_\varepsilon$. Osserviamo che $\forall 0 < \varepsilon, \varepsilon' < \pi$ $\Sigma_\varepsilon$ è omotopicamente equivalente a $\Sigma_{\varepsilon'}$. Inoltre, per $\varepsilon$ piccolo, $\Gamma_\varepsilon$ è omotopicamente equivalente a $\partial B(z, r)$ con $r$ piccolo. Ma allora possiamo applicare la formula dell'integrale di Cauchy che ci dice che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\partial B(z,r)}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad \forall 0 < \varepsilon < \pi$$

Facendo tendere $\varepsilon \to \pi$ il settore circolare copre tutta la corona circolare ad esclusione del segmento percorso in verso opposto e dunque:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

2. Sviluppiamo separatamente in serie di potenze i due integrali.
*Svolgimento:* Usiamo che $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi(1 - \frac{z}{\xi})} = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\xi^{k+1}}$ che converge uniformemente in $B(0, \rho_1')$, allora possiamo scambiare serie ed integrale ottenendo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{k \geq 0} z^k \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1} dz}\right)$$

convergente in $B(0, \rho_1')$.
Sviluppiamo il secondo integrale: $\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z - \xi} = -\frac{1}{z(1 - \frac{\xi}{z})} = -\sum_{k \geq 0} \frac{\xi^k}{z^{k+1}} = -\sum_{h < 0} \frac{z^h}{\xi^{h+1}}$ con il cambio $h = -k - 1$ e si ha convergenza uniforme per tutti gli $z$ tali che $|z| > \rho_2'$. Scambiando serie con integrale si ottiene:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{h < 0} z^h \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi^{h+1}} d\xi\right)$$

per gli $z$ tali che $|z| > \rho_2'$;

3. *Conclusione:* Definiamo i seguenti coefficienti:

$$a_k \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi & k \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi^{h+1}} d\xi & k < 0 \end{cases}$$

allora $f(z) = \sum_{k \in Z} a_k z^k$ in $\{z | \rho_2 \leq |z| \leq \rho_1\}$ e facendo tendere $\rho_2 \to r_2$ e $\rho_1 \to r_1$ otteniamo

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k \qquad \text{in } K = \{z | r_2 \leq |z| \leq r_1\}$$

$\bowtie$

Esercizio: Sia $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$. Calcolare lo sviluppo in serie di Laurent nelle due corone circolari $K_1 = \{z | 0 < |z| < 1\}$, $K_2 = \{z | 0 < |z - 1| < 1\}$. risolvimi.

# Capitolo 4

# Singolarità isolate

**Definizione 4.1** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ e $f : U \to \mathbb{C}$ analitica; sia $a \in \mathbb{C} - U$ tale che $\exists r > 0$ tale che la palla puntata $\dot{B}(a,r) = B(a,r) - \{a\} \subseteq U$, allora diciamo che $a$ è una **singolarità isolata per** $f$.*

Esempio: $f(z) = \frac{1}{z}$ ha una singolarità isolata in 0 ($f$ è definita in $\mathbb{C} - \{0\}$).

Osservazione: Se $a$ è una singolarità isolata per $f$, allora $f$ ha uno sviluppo in serie di Laurent in $\dot{B}(a,r)$ in quanto $\dot{B}(a,r)$ è una corona circolare $\Rightarrow f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$.

Le singolarità si classificano andando a vedere quali sono i coefficienti non nulli $a_k$ corrispondenti ai valori di $k$ negativi. Diamo allora la seguente

**Definizione 4.2** *Un punto $a$ che è una singolarità isolata si dice:*

**Singolarità eliminabile** *se $a_k = 0$ per ogni $k < 0$. Ovvero lo sviluppo in serie di Laurent è in realtà uno sviluppo in serie di potenze. Viene detta eliminabile poiché possiamo estendere $f$ ad $a$ con il valore che assume la serie di potenza in $a$;*

**Singolarità polare o polo** *se esiste un numero finito non nullo di coefficienti $a_k \neq 0$ con $k < 0$. In tale situazione, detto $m = max_{k>0}\{a_{-k} \neq 0\}$, diciamo che il punto $a$ è un polo di ordine $m$ e che $f$ ha ordine $-m$ in $a$ (cioè $O_f(a) = -m$). I poli di ordine 1 sono detti **poli semplici**.*

**Singolarità essenziale** *se $a_k \neq 0$ per infiniti $k < 0$.*

Vediamo alcuni esempi di singolarità isolate:

1. La funzione $\frac{1}{z}$ (sviluppo di Laurent di se stessa) ha una singolarità polare in 0 di ordine 1;
2. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ha una singolarità eliminabile in 0, infatti $\sin z = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \Rightarrow \frac{\sin z}{z} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$ è il suo sviluppo in serie di Laurent;
3. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in zero in quanto $e^z = \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}$ e dunque $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k\leq 0}\frac{z^k}{(-k)!}$.

In generale è molto difficile trovare una serie di Laurent nell'intorno della singolarità, dunque è difficile o quasi impossibile caratterizzare la singolarità con la definizione. Vediamo allora dei teoremi per lo studio delle singolarità:

**Teorema 4.0.1** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in U$, $f : U - \{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfa; allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *$f$ ha una singolarità eliminabile in $a$;*

2. *$f$ si può estendere a una funzione olomorfa su tutto $U$;*

3. *$f$ è limitata nella corona circolare $\dot{B}(a,r)$ per qualche $r > 0$.*

*Dimostrazione:*

$1 \Rightarrow 2)$ Lo sviluppo intorno ad $a$ di $f$ (in $\dot{B}(a,r) \subseteq U$) è dato da $\sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ e definisce una funzione olomorfa su tutta la palla $B(a,r)$ (anche in $a$) e dunque basta porre $f(a) = a_0$ per avere la tesi;

$2 \Rightarrow 1)$ Se $f$ si estende ad una funzione olomorfa su tutto $U$ allora lo sviluppo in serie di Laurent di $f$ intorno ad $a$ deve essere uno sviluppo in serie di potenze e dunque la singolarità è eliminabile per definizione;

$2 \Rightarrow 3)$ Grazie allo sviluppo in serie non è possibile che la funzione sia illimitata per definizione;

$3 \Rightarrow 1)$ Sia $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ sviluppo in serie di Laurent intorno ad $a$. Scriviamo i coefficienti della serie (li conosciamo per dimostrazioni precedenti) $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \overline{B(a,r)}} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$. Per ipotesi sappiamo che $f$ è limitata e dunque $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \dot{B}(a_r)$. In particolare allora vale anche sul bordo e possiamo stimare la norma dell'integrale:

$$|a_k = |\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial \overline{B(a,r)}} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{k+1}}2\pi r = \frac{M}{r^k}$$

Se $k < 0$ facendo tendere $r$ a 0 si ha che $\frac{M}{r^k} \to 0$ e cioè $a_k = 0$ $\forall k < 0$.

$\bowtie$

**Teorema 4.0.2** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in U$, $f : U - \{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfa; allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *$f$ ha un polo di ordine $m$ in $a$;*

2. *La funzione $(z-a)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile in $a$;*

3. *$\exists b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(z-a)^j}$ ha una singolarità eliminabile in $a$.*

*Dimostrazione:*

$1 \Leftrightarrow 2)$ Scriviamo $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ sviluppo in serie di Laurent in un intorno di $a$, allora $(z-a)^m f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^{m-k} = \sum_{h\in\mathbb{Z}} a_{m-h}(z-a)^h$ con la sostituzione $h = m - k$;

$1 \Rightarrow 3)$ $f(z) = \sum_{k\geq m}^{-1} a_k(z-a)^k + \sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$. Posto $b_j = a_{-k}$ con $1 \leq j \leq m$ si ha la tesi.

$3 \Rightarrow 1)$ $f(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(z-a)^j} = \sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$ con $a_k = b_{-j}$ con $-m \leq k \leq -1$. Porto di là la serie dei $b_j$ rinominata e ho la tesi

$\bowtie$

**Definizione 4.3** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto; una funzione $f$ di dice **meromorfa** su $U$ se $f$ è una funzione olomorfa in $U - S$ con $S$ discreto in $U$ tale che abbia solo singolarità eliminabili o poli nei punti di $S$.*

Osservazione: $f$ olomorfa in $U \Rightarrow f$ meromorfa in $U$.

Osservazione: $f$ è meromorfa in $U \Leftrightarrow$ lo sviluppo in serie di Laurent di $f$ in un qualsiasi $a \in U$ è in realtà una serie di Laurent meromorfa.

Osservazione: Siano $f, g$ meromorfe in $U \Rightarrow f \pm g, fg$ sono meromorfe e, se $g$ non è identicamente nulla, allora $\frac{f}{g}$ è meromorfa.

**Definizione 4.4** *Definiamo $O(U)$ l'anello delle funzioni olomorfe in $U$ e $M(U)$ il campo delle funzioni meromorfe in $U$.*

Osservazione: $M(U)$ è il campo delle frazioni di $O(U)$ (non dimostreremo questo fatto, lo abbiamo dimostrato solo localmente, cioè abbiamo mostrate che $\mathbb{C}((x))$ è il campo delle frazioni di $\mathbb{C}[[x]]$).

**Teorema 4.0.3 (Teorema di Casorati-Weierstrass)** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in U$ e $f : U - \{a\} \to \mathbb{C}$ analitica, se $f$ ha una singolarità essenziale in $a$, allora $\forall r > 0$ l'immagine di $\dot{B}(a, r)$ è un sottoinsieme denso in $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione:* Supponiamo per assurdo che esista $r > 0$ tale che $f(\dot{B}(a, r))$ non sia denso in $\mathbb{C}$, ovvero esista $\alpha \in \mathbb{C}$ e $s \in \mathbb{R}^+$ tali che $|f(z) - \alpha| > s$ per ogni $z \in \dot{B}(a, r)$ aperta. Consideriamo allora la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)-\alpha}$ olomorfa e limitata in $\dot{B}(a, r)$, allora, per il teorema sulla singolarità eliminabile, $g$ ha una singolarità eliminabile in $a$. Dato che l'inverso di una funzione olomorfa è meromorfa per l'osservazione precedente, anche $f(z) - \alpha$ ha singolarità eliminabili o polari, assurdo.

$\bowtie$

**Corollario 4.0.4** *Sia $a$ una singolarità isolata di $f$, allora:*

1. *$a$ è una singolarità eliminabile $\Leftrightarrow$ esiste finito il $\lim_{z \to a} f(z)$;*
2. *$a$ è un polo $\Leftrightarrow \exists \lim_{z \to a} f(z) = \infty$;*
3. *$a$ è una singolarità essenziale $\Leftrightarrow$ non esiste il limite $\lim_{z \to a} f(z)$ .*

*Dimostrazione:*

1. Segue direttamente dal teorema sulle singolarità eliminabili;
2. $\Rightarrow$) Sia $a$ un polo di ordine $m$, ovvero $f(z) = \sum_{k \geq -m} a_k (z - a)^k$ nella palla puntata, allora abbiamo visto che la funzione $g(z) = (z - a)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile; in particolare dunque esiste finito il limite $\lim_{z \to a} g(z)$, ma allora
$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{(z - a)^m} = \infty$$
$\Leftarrow$) Se $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ allora $\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ cioè $\frac{1}{z}$ ha una singolarità eliminabile. Dunque $f(z)$ (sempre perché inversa di olomorfa) ha singolarità o eliminabile o polare. La singolarità però non può essere eliminabile per ipotesi e dunque $f$ ha un polo;
3. $\Rightarrow$) Segue dal teorema di Casorati-Weierstrass;
$\Leftarrow$) Per la caratterizzazione degli altri punti rimane quest'ultima possibilità e basta.

$\bowtie$

Esercizio: Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, mostrare che l'insieme delle funzioni che hanno singolarità isolate in $U$ in generale non è un campo. risolvimi

**Definizione 4.5** *Sia $f$ una funzione con una singolarità isolata in un punto $a$ e sia $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ lo sviluppo in serie di Laurent intorno ad $a$; definiamo* ***residuo di $f$ in $a$,*** *$Res(f,a)$, il coefficiente $a_{-1}$ dello sviluppo.*

**Proposizione 4.0.5** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $a \in U$ tale che $\overline{B(a,r)} \subseteq U$, Sia $f$ olomorfa in $f-\{a\}$, allora*

$$\int_{\partial\overline{B(a,r)}} f(z)dz = 2\pi i Res(f,a)$$

*Dimostrazione:* Consideriamo $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ sviluppo in serie di Laurent intorno ad $a$ in $\dot{B}(a,R) \subseteq U$ e $R > r$; dato che la serie di Laurent converge uniformemente nella corona circolare posso scambiare la serie con l'integrale ottenendo:

$$\int_{\partial\overline{B(a,r)}} f(z)dz = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{\partial\overline{B(a,r)}} (z-a)^k dz =$$

Adesso per ogni $k \neq -1$ la forma differenziale è esatta e pertanto l'integrale vale zero. Si ottiene:

$$a_{-1}\int_{\partial\overline{B(a,r)}} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i Res(f,a)$$

dove l'ultima uguaglianza si ha quando $a$ è una singolarità.

$\bowtie$

**Teorema 4.0.6 (Teorema dei residui)** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso e siano $z_1,...,z_n \in U$, consideriamo $f : U - \{z_1,...,z_n\} \to \mathbb{C}$ olomorfa e $\gamma : I \to U - \{z_1,...,z_n\}$ cammino chiuso, allora:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^n Res(f,z_j)I(\gamma,z_j)$$

*Tale formula è detta* ***formula dei residui****.*

*Dimostrazione:* Siano $Q_1,...,Q_n$ definite come $Q_j(z) = \sum_{k<0} a_{k_j}(z-z_j)^k$ dove gli $a_{k_j}$ corrispondono ai coefficienti negativi degli sviluppi di $f(z)$ negli $z_j$. Allora la funzione $g(z) = f(z) - Q_1(z) - ... - Q_n(z)$ è olomorfa su tutto $U$. Allora per la semplice connessione di $U$ si ha

$$\int_\gamma g(z)dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_\gamma Q_j(z)$$

Quando integriamo l'unico termine della scrittura dei $Q_j$ che da contributo è quello con $k_j = -1$. Si ottiene pertanto

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^n Res(f,z_j)\int_\gamma \frac{dz}{z-z_j} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^n Res(f,z_j)I(\gamma,z_j)$$

$\bowtie$

Osservazione: Il teorema appena dimostrato è importante poiché ci mostra che l'integrale lungo una curva chiusa dipende solamente dai residui.

Vediamo adesso delle tattiche per calcolare in modo agevole i residui:

1. Se $f$ ha una singolarità eliminabile in $z_0$, allora $Res(f,z_0) = 0$;

2. Se $f$ ha un polo semplice in $z_0$, allora $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = Res(f,z_0)$;

3. Se $f$ ha un polo di ordine $m \geq 2$ in $z_0$, allora $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile in $z_0$ e $Res(f, z_0)$ =coefficiente di $(z-z_0)^{m-1}$ nello sviluppo in serie di $g_z$ e dunque $Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}$;
4. Se $f$ ha una singolarità essenziale non ci sono metodi generali.

Esempio: Sia $f(z) = \frac{1-\cos z}{z}$, verifichiamo che tipo di punto è $z_0 = 0$: $\lim_{z \to 0} \frac{1-\cos z}{z} = 0$ (scrivo il coseno con la definizione) e dunque $f$ ha una singolarità eliminabile in zero ($Res(f, 0) = 0$).

Esempio: Sia $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, verifichiamo che tipo di punto è $z_0 = 0$: $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$ e quindi $z_0 = 0$ è un polo semplice e $Res(f, 0) = 1$.

**Proposizione 4.0.7** *Sia $f$ una funzione tale che $f = \frac{p}{q}$ in un intorno di $z_0$, con $p, q$ olomorfe e $p(z_0) \neq 0$ e $z_0$ è uno zero semplice di $q$, ovvero $O_q(z_0) = 1$, allora $z_0$ è un polo semplice per $f$ e $Res(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$*

*Dimostrazione:* Scriviamo $q(z) = q'(z_0)(z-z_0)+\sum_{k \geq 1} a_k (z-z_0)^k \Rightarrow (z-z_0)f(z) = \frac{p(z)}{q'(z_0)+\sum_{k \geq 2} a_k (z-z_0)^{k-1}}$ e per $z \to z_0$ si ha $\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

$\bowtie$

Esercizio: Sia $f(z) = \frac{z^2-3z+1}{z^2(1-z)}$ calcolare $\int_{\alpha_r} f(z)dz$ per ogni $r > 0$ e $r \neq 1$ e con $\alpha_r = re^{2\pi it}$ cammino della circonferenza intorno all'origine ($t \in [0, 1]$).
*Svolgimento:* Calcoliamo le singolarità della funzione: $z = 0$ è un polo di ordine 2 (si moltiplica per $z^2$ e il limite è finito), mentre $z = 1$ è un polo semplice (teorema precedente). Vale dunque $Res(f, 0) = -2$ e $Res(f, 1) = 1$. Quindi:

$$0 < r < 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\alpha_r} f(z)dz = 2\pi i Res(f, 0) = -4\pi i$$

$$r > 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\alpha_r} f(z)dz = 2\pi i(Res(f, 0) + Res(f, 1)) = -2\pi i$$

Esercizio: Calcolare il residuo di $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ nei suoi punti singolari.
*Svolgimento:* Le singolarità sono nei punti $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. Per quanto riguarda 1 possiamo applicare il teorema dimostrato e il polo è semplice. In particolare vale che $Res(f, 1) = \frac{p(1)}{q'(1)} = -e$. Per quanto riguarda $z_0 = 0$ notiamo prima di tutto che è una singolarità essenziale (facendo i limiti per $0^+$ e $0^-$ si ottengono valori diversi); cerchiamo di calcolare il residuo. Consideriamo gli sviluppi $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{z^k} \frac{1}{k!}$ e $\frac{1}{1-z} = \sum_{k \geq 0} z^k$. $f(z)$ è il prodotto delle due serie: voglia calcolare il coefficiente di $\frac{1}{z}$; questo viene esattamente $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} = e - 1$.

**Definizione 4.6** *Sia $f(z) = a_m z^m (1 + h(z))$ con $m \in \mathbb{Z}$, $m = O_f(0)$, $h(0) = 0$ e $h$ olomorfa in 0, sviluppo in serie di Laurent di $f$ in 0, con 0 singolarità polare, $f'(z) = m a_m z^{m-1}(1 + h(z)) + a_m z^m h'(z)$ e consideriamo $\frac{f'}{f}(z) = \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1+h(z)}$ olomorfa in 0 (al denominatore non si annulla e $h$ è olomorfa), allora $Res(\frac{f'}{f}, 0) = m = O_f(0)$. La funzione $\frac{f'}{f}$ è detta **derivata logaritmica** (la definizione è analoga con $z_0$ al posto di 0).*

**Teorema 4.0.8 (Teorema dell'indicatore logaritmico)** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso, sia $f$ meromorfa in $U$ e sia $\gamma : I \to U$ cammino chiuso tale che $\gamma(I)$ non contenga né zeri, né poli di $f$, allora la funzione $\frac{f'}{f}$ è meromorfa in $U$, non ha singolarità in $\gamma(I)$ e vale*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{z_j \text{ poli interni a } \gamma} I(\gamma, z_j) O_f(z_j)$$

*Dimostrazione:* La funzione $\frac{f'}{f}$ è meromorfa poiché quoziente di funzioni meromorfe; $\frac{f'}{f}$ ha poli solo negli zeri o nei poli di $f$ poiché $Res(\frac{f'}{f}, z_0) \neq 0$ se $z_0$ è un polo o è uno zero di $f$; inoltre se $z_0$ è polo o zero di $f$ si ha $O_f(z_0) = Res(\frac{f'}{f}, z_0)$. Posso allora applicare il teorema dei residui perché $U$ è semplicemente connesso ottenendo la tesi.

$\bowtie$

OSSERVAZIONE: Nella sommatoria abbiamo un numero finito di addendi poiché la chiusura dei punti interni a $\gamma$ è un compatto e gli zeri e i poli sono un sottoinsieme discreto (discreto in compatto implica finito)

OSSERVAZIONE: Se $\gamma$ circonda semplicemente (con indice 1) tutti gli zeri e i poli di $f$ allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)dz = \text{(numero degli zeri con molteplicità)} - \text{(numero poli con molteplicità)}$$

**Teorema 4.0.9 (Teorema di Rouché)** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso e sia $\gamma : I \to \mathbb{C}$ curva chiusa regolare a tratti (in realtà basta una curva continua) e siano $f, g$ olomorfe in $U$ tali che $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \gamma(I)$, allora*

$$\sum_{z \in U - \gamma(I)} I(\gamma, z)O_f(z) = \sum_{z \in U - \gamma(I)} I(\gamma, z)O_g(z)$$

*Dimostrazione:* Le due scritture delle serie sono ben definite perché il numero degli zeri di $f$ e $g$ interni a $\gamma$ è finito. La disuguaglianza dell'ipotesi ci dice che $f$ e $g$ non hanno zeri in $\gamma(I)$. Definiamo $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ e riscriviamo la disuguaglianza come $|F(z) - 1| < 1$ per ogni $z \in \gamma(I) \Rightarrow F(\gamma(I)) \subseteq B(1, 1)$. Adesso $I(F \circ \gamma, 0) = 0$ poiché 0 è un punto esterno, allora:

$$0 = I(F \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{F\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{F'(\gamma(t))\gamma'(t)}{F(\gamma(t)}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F'}{F}(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g})dz$$

Applicando adesso il teorema dell'indice logaritmico si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'}{g}dz \quad \Rightarrow \quad \sum_{z \in U - \gamma(I)} I(\gamma, z)O_f(z) = \sum_{z \in U - \gamma(I)} I(\gamma, z)O_g(z)$$

$\bowtie$

OSSERVAZIONE: $I(\gamma, z_0)$ prende il valore 1 per i punti interni e 0 per i punti esterni; questo ci dice che il numero degli zeri di $f$ interni a $\gamma$ è uguale al numero degli zeri di $g$ intorno a $\gamma$.

ESERCIZIO: Sia $a \in \mathbb{R}, a > 1$, dimostriamo che l'equazione $ze^{a-z} = 1$ ha una sola soluzione nel disco unitario $\overline{B(0, 1)}$.

*Svolgimento:* Consideriamo $g(z) = ze^{a-z} - 1$ e vogliamo calcolare gli zeri di questa funzione nel disco; se definiamo $f(z) = ze^{a-z} = g(z) + 1$, allora sappiamo che $f$ ha un unico zero in $z = 0$ poiché $e^{a-z}$ non si annulla mai. Vediamo se $f$ e $g$ soddisfano le ipotesi di Rouché: abbiamo $|f(z) - g(z)| = 1$, vediamo quanto vale la norma di $f$ sulla circonferenza unitaria: se $|z| = 1 \Rightarrow z = x + iy$ con $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |f(z)| = e^{a-x}$. Siccome $a > 1 \Rightarrow a - x > 0 \Rightarrow |f(z)| > 1 = |f(z) - g(z)|, \forall z \in \partial\overline{B(0, 1)}$. Allora, per Rouché, il numero degli zeri di $g$ in $\overline{B(0, 1)}$ è uguale a quello degli zeri di $f$ nella palla, cioè 1.

# Capitolo 5

# Sfera di Riemann

Vogliamo estendere il dominio di una funzione al valore $+\infty$; per farlo introduciamo la sfera di Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$. Per definizione $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è lo spazio $\dfrac{\mathbb{C}^2 - \{0,0\}}{\sim}$ dove $\sim$ è una relazione di equivalenza e in particolare

$$(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \Longleftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \in \mathbb{C} \; t.c. \; \lambda(z_0, z_1) = (w_0, w_1)$$

Indichiamo un elemento del quoziente $[(z_0, z_1)]$ con la scrittura $[z_0, z_1]$ (sono le **coordinate omogenee** del punto). Notiamo che dalla relazione di equivalenza discende che due elementi appartenenti a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sono uguali se e solo se sono uno un multiplo complesso dell'altro: $[z_0, z_1] = [w_0, w_1] \Leftrightarrow [w_0, w_1] = [\lambda z_0, \lambda z_1]$.

**Definizione 5.1** *Nello spazio* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *definiamo i seguenti insiemi:*

$$U_0 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) | z_0 \neq 0\}$$

$$U_1 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) | z_1 \neq 0\}$$

*che chiamiamo* ***aperti fondamentali****.*

Osservazione: Per come sono definiti gli aperti fondamentali, un elemento $[z_0, z_1] \in U_0$ è uguale all'elemento $[1, \frac{z_1}{z_0}]$. Dato che questo lo posso fare per ogni elemento in $U_0$ (e analogamente per ogni elemento di $U_1$) sono ben definite le mappe:

$$\begin{array}{cccc} \Phi_0 : & U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [z_0, z_1] & \longmapsto & \frac{z_1}{z_0} \\ \Phi_1 : & U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [z_0, z_1] & \longmapsto & \frac{z_0}{z_1} \end{array}$$

Si verifica che le mappe così definite sono omeomorfismi.

Identifichiamo adesso $U_0$ con $\mathbb{C}$ e denotiamo il punto $[0, 1] \in U_1 \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con $\infty$. I punti che non appartengono a $U_0$ sono della forma $[0, a]$, ma allora, per come sono definiti gli elementi di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, soltanto $\infty$ non appartiene a $U_0$. Possiamo dunque dire che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup [0, 1] = \mathbb{C} \cup \infty$.

**Definizione 5.2** *La struttura* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty = \hat{\mathbb{C}}$ *prende il nome di* ***sfera di Riemann****.*

Continuando con l'identificazione fatta (cioè $U_0 = \mathbb{C}$ e $U_1 = \mathbb{C} - \{0\} \cup \infty$ poiché il punto $[0, 1]$ che doveva essere moralmente lo zero è diventato infinito) possiamo reinterpretare la funzioni $\Phi_0$ e $\Phi_1$: $\Phi_0 = id_{\mathbb{C}}$ mentre $\Phi_1 : \mathbb{C} - \{0\} \cup \infty \to \mathbb{C}$ è tale che $\Phi_1(z) = \frac{1}{z}$ se $z \neq \infty$ e $\Phi_1(\infty) = 0$.

**Definizione 5.3** *La coppia $\{(U_0, \Phi_0), (U_1, \Phi_1)\}$ prende il nome di* ***atlante analitico*** *e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è detto* ***varietà analitica****.*

Da adesso in avanti tratteremo un elemento della sfera di Riemann come un numero complesso con attenzione al fatto che è presente anche l'elemento $\infty$ e che vale la relazione $\frac{1}{\infty} = 0$.

**Definizione 5.4** *Sia $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto, una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ si dice* ***olomorfa (meromorfa)*** *se:*

1. *$f$ è olomorfa (meromorfa) in $U \cap \mathbb{C}$;*
2. *La funzione $\hat{f}(z) = f(\frac{1}{z})$ è olomorfa (meromorfa) in $\hat{U} = \{\frac{1}{z} | z \in U\}$.*

OSSERVAZIONE: Se $U \subseteq \mathbb{C}$ riotteniamo la definizione di funzione olomorfa o meromorfa in un aperto di $\mathbb{C}$; se $\infty \in U$, allora stiamo anche richiedendo che $\hat{f}(z) = f(\frac{1}{z}$ sia olomorfa (meromorfa) in 0.

OSSERVAZIONE: Se $f$ ha una singolarità isolata all'infinito (avviene sempre se $f$ ha un numero finito di singolarità: un intorno di $\infty$ ha la forma $|z| \geq c$ con $c > 0$ o $c = \infty$ e dunque basta scegliere $c$ abbastanza grande), allora il tipo di singolarità di $f$ in $\infty$ è quello di $\hat{f}$ in 0.

ESEMPIO: Consideriamo $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$; vogliamo capirne il comportamento a $\infty$ e pertanto consideriamo $\hat{p}(z) = p(\frac{1}{z}) = \frac{a_n}{z^n} + ... + \frac{a_1}{z} + a_0$. Adesso se $n > 1$, allora $\hat{p}$ ha un polo di ordine $n$ in 0 e dunque $p$ ha un polo di ordine $n$ in $\infty$. Se $n = 0$, allora $\hat{p} = p =$costante e dunque abbiamo una singolarità eliminabile in $\infty$.

ESEMPIO: $f(z) = e^z$, $\hat{f}(z) = e^{\frac{1}{z}}$, allora $\hat{f}(z)$ ha una singolarità essenziale in 0 e dunque $f$ ha una singolarità essenziale in $\infty$.

**Proposizione 5.0.1** *Le funzioni olomorfe su tutta la sfera di Riemann sono solo le costanti.*

*Dimostrazione:* Sia $f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora $f$ è limitata altrimenti avremmo una singolarità in $\infty$, allora $f$ è costante per il teorema di Louville.

$\bowtie$

**Proposizione 5.0.2** *Le funzioni meromorfe su tutto $\hat{\mathbb{C}}$ sono le funzioni razionali $f = \frac{p(z)}{q(z)}$.*

*Dimostrazione:* Consideriamo $f \in M(\hat{\mathbb{C}})$; dato che in particolare è meromorfa in $\infty$ allora le singolarità sono in numero finito (discreto in compatto implica finito): $\exists c$ grande tale che $f$ sia analitica nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} | |z| > \mathbb{C}\}$ poiché non contiene le singolarità finite ed è intorno di $\infty$. Tutte le singolarità sono contenute in $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leq \mathbb{C}\}$ e sono in numero finito, diciamo $\{z_1, ..., z_n\}$; inoltre tali singolarità sono al più polari per definizione di meromorfa. Indichiamo con $m_i$ l'ordine del polo $i$. Allora $g(z) = f(z)(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_m)^{m_n}$ è una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e dunque possiamo scrivere $g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ con $a_k \in \mathbb{C}$ calcolati mediante la formula di Cauchy. Gli $a_k$ sono in numero finito perché $g(z)$ è meromorfa al più in $\infty$ e quindi $\infty$ è una singolarità al più polare. Dato che $g(z)$ è un polinomio si ha che $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_m)^{m_n}}$.

$\bowtie$

**Definizione 5.5** *Sia $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto, $f \in M(U)$ tale che $f$ ha una singolarità isolata in $\infty$, definiamo $Res(f, \infty) = -Res(\tilde{f}, 0)$ dove $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2}\hat{f}(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$.*

ESERCIZIO: Dimostrare che $Res(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R} f(\xi) d\xi$ con $\alpha_R$ circonferenza centrata nell'origine di raggio $R$ con $R$ abbastanza grande tale che $f$ non abbia singolarità nell'aperto degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| > R$.

*Svolgimento:* Poiché $f$ ha una singolarità isolata in $\infty$ per $R >> 0$, $f$ è olomorfa in $\{z \in \mathbb{C}|\ |z| > R\}$, allora $\hat{f}$ è olomorfa in $\{z \in \mathbb{C}|\ |z| < \frac{1}{R}\} - \{0\}$. Stessa cosa per $\tilde{f}$, allora

$$Res(\tilde{f}, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_{\frac{1}{R}}} f(\frac{1}{z}) \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R} f(\xi) d\xi$$

Dove si è usato il cambio di variabile $\xi = \frac{1}{z}$.

OSSERVAZIONE: Il metodo per il calcolo dei residui (i limiti) non vale all'infinito, ad esempio $f(z) = \frac{1}{z}$ ha una singolarità eliminabile in $\infty$, ma non è vero che $Res(f\infty) = 0$ (dalla formula risulta essere $-1$).

ESERCIZIO: Sia $f(z) \in M(\hat{\mathbb{C}})$, dimostrare che $\sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} Res(f, z) = 0$.
*Svolgimento:* Sia $R$ abbastanza grande tale che le singolarità di $f$ sono tutte contenute in $\{z \in \mathbb{C}|\ |z| < R\}$. Allora, grazie alla formula dei residui e all'esercizio precedente si ha:

$$-Res(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R} f(z) dz = \sum_{z \in \mathbb{C}} Res(f, z) \quad \Rightarrow \quad \sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} Res(f, z) = 0$$

La formula $\sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} Res(f, z)$ è molto utile poiché per calcolare la somma di tutti i residui di $\mathbb{C}$ ci basta calcolare il residuo all'infinito.

ESEMPIO: Sia $f(z) = \frac{z^9}{z^{10}-1}$ meromorfa all'infinito. Calcoliamo $\int_{\alpha_R} f(z)dz$: invece di calcolare la somma di tutti i residui, ci basta calcolare il residuo all'infinito. $Res(f, \infty) = Res(\tilde{f}, 0)$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = \frac{\frac{1}{z^{11}}}{\frac{1}{z^{10}} - 1} = \frac{1}{z(1-z^{10})}$ che è la serie geometrica $\frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} z^{10k} \Rightarrow Res(\tilde{f}, 0) = Res(f, \infty) = 1$. Vale dunque che $\int_{\alpha_R} f(z)dz = -2\pi i Res(f, \infty) = -2\pi i$

# Capitolo 6

# Calcolo di integrali definiti con il metodo dei residui:

Vediamo alcune applicazioni del teorema dei residui per il calcolo degli integrali:
**Integrali trigonometrici**: Consideriamo $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t; \cos t)dt$ dove $R(x, y)$ è una funzione razionale il cui denominatore non si annulla mai nei punti della circonferenza unitari (cioè sui punti della forma $(sint, cost)$. *Nota:* a volte è più facile calcolare gli integrali reali considerandoli complessi. Sia dunque $z = e^{it}$ e

$$\begin{cases} \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} \\ \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \\ dz = ie^{it}dt = izdt \end{cases}$$

Allora vale:

$$I = \int_{\alpha_1} R\Big(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}); \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\Big)\frac{1}{iz}dz = 2\pi i \sum_{z_j \text{ poli interni a } \alpha_1} Res(R(\sin t; \cos t), z_j)$$

Esempio: Sia $a > 1$, calcolare $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a \sin t}$. Applichiamo la sostituzione descritta e otteniamo

$$I = \int_{\alpha_1} \frac{1}{iz}\frac{1}{a + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})}dz = \int_{\alpha_1} \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}dz = \int_{\alpha_1} f(z)dz$$

Calcoliamo adesso le singolarità di $f$: le radici del polinomio al denominatore sono $-ai \pm i\sqrt{a^2 - 1}$, ma solo la radice con il $+$ sta dentro $S^1$ e pertanto la funzione $f$ ha un solo polo (semplice perché al denominatore la radice ha molteplicità 1) all'interno di $\alpha_1$. Per calcolare $Res(f, -ai + i\sqrt{a^2 - 1}$ utilizziamo la formula e pertanto $Res(f, -ai + i\sqrt{a^2 - 1} = \frac{2}{-2ai+2i\sqrt{a^2-1}+2ai} = -\frac{i}{\sqrt{a^2-1}}$. Pertanto $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$;

**Integrali impropri di funzioni razionali:** Partiamo con un lemma preliminare:

**Lemma 6.0.1** *Per $\varepsilon > 0$ definiamo $H_\varepsilon = \{z = x+iy \in \mathbb{C} | \ |y| > -\varepsilon\}$, sia $f$ meromorfa in $H_\varepsilon$ tale che $f$ ha un numero finito di poli e tale che $\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, allora $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$ con $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in (0, \pi)$ ($\gamma_R$ è la semicirconferenza superiore di raggio $R$).*

*Dimostrazione:* Per $R$ sufficientemente grande l'integrale è ben definito poiché, avendo un numero finito di poli, $\gamma_R$ non passa per nessun polo. Sia $M(R) = max\{|f(z)| \mid z \in \gamma_R\}$. Per ipotesi $M(R) \to 0$ per $R \to \infty$, allora $|\int_{\gamma_R} f(z)dz| \leq M(R)l(\gamma_R) = M(R)\pi R \to 0$ per $R \to +\infty$.

$\bowtie$

Sia $f$ una funzione razionale con grado del denominatore maggiore uguale al grado del numeratore $+2$, ovvero $f = \frac{p}{q}$ con $deg(q) \geq deg(p) + 2$. Consideriamo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ razionale senza poli sull'asse reale, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx$$

dove l'uguaglianza è vero se c'è convergenza. Nel caso in cui valga la condizione sui gradi dei polinomi $p, q$ si ha convergenza dell'integrale e possiamo provare a calcolarlo. Riscriviamo l'integrale lungo la curva chiusa descritta dalla semicirconferenza di raggio $r$ e dalla retta reale e, utilizzando il teorema dei residui, otteniamo:

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in H, |z| < r} Res(f, z)$$

con $H = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) \geq 0\}$. Facendo adesso tendere $r \to +\infty$, per il lemma precedente, l'integrale lungo $\gamma_r$ tende a 0 e pertanto otteniamo che

$$I = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z \in H} Res(f, z)$$

Esempio: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i Res(f, i)$ dove $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Adesso $Res(f, i) = \lim_{z \to i}(z - i)\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}$ e dunque $I = \pi i$.

**Lemma 6.0.2** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto con $0 \in U$ e $g$ meromorfa in $U$ tale che $0$ sia un polo semplice per $g$, allora $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = \pi i Res(g, 0)$ con $\gamma_\varepsilon$ semicirconferenza di raggio $\varepsilon$: $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^i t$ per $t \in [0, \pi]$.*

*Dimostrazione:* Consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent intorno all'origine $g(z) = \frac{a_1}{z} + h(z)$ con $h$ olomorfa in $B(0, r)$ con $r$ piccolo. La funzione $h(z)$ è limitata in $B(0, r)$ ovvero $|h(z)| < M$. Allora $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} h(z)dz = 0$ poiché

$$|\int_{\gamma_\varepsilon} h(z)dz| \leq Ml(\gamma_\varepsilon) \to 0$$

Abbiamo dunque che

$$\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = Res(g, 0) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \pi i Res(g, 0)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che l'integrale (svolgendolo con la definizione) vale $\pi i$.

$\bowtie$

**Lemma 6.0.3** *Consideriamo $H_\varepsilon = \{z = x + iy \in \mathbb{C} |\ |y| \geq -\varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$. Sia $f \in M(H_\varepsilon)$ con un numero finito di poli e tale che $\lim_{|z| \to \infty, z \geq 0} f(z) = 0$. Consideriamo $\gamma_r(t) = re^{it}$ semicirconferenza di raggio $r$ con $t \in [0, \pi]$, allora $\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}dz = 0$*

*Dimostrazione:* $\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz} = \int_0^\pi f(re^{it})e^{ir(\cos t + \sin t}ire^{it}dt$ dove l'uguale è conseguenza dello sviluppo lungo il cammino. Consideriamo adesso $M(r) = max\{|f(z)| \mid |z| = r\}$ e passando ai valori assoluti si ha che l'integrale di partenza è minore uguale di $M(r)r|\int_0^\pi e^{-r\sin t}|$. Osserviamo che $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin t}{t}$ se $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\sin t}{t} \geq -\frac{2}{\pi} + 2$ per $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$. Allora

$$\int_0^\pi e^{-r\sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-r\sin t}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\frac{2t}{\pi}}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-r(-\frac{2t}{\pi}+2t)}dt = \frac{\pi}{r}(1 - e^{-r})$$

Possiamo dunque concludere:

$$|\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}| \leq M(r)r\frac{\pi}{r}(1-e^{-r}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$\bowtie$

**Teorema 6.0.4** *Nelle notazioni precedenti, sia $f \in M(H_\varepsilon)$ con un numero finito di poli e nessuna singolarità sulla retta reale e tale che $\lim_{|z|\to\infty, z\geq 0} f(z) = 0$. Consideriamo $\gamma_r(t) = re^{it}$ semicirconferenza di raggio $r$ con $t \in [0,\pi]$, allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{z_0\in H} Res(f(z)e^{iz}, z_0)$$

*Dimostrazione:* Integriamo sulla semicirconferenza di raggio $r$ la funzione $f(z)e^{iz}$ come abbiamo fatto per quanto riguarda gli integrali di funzioni razionali. Per il teorema dei residui di ha che

$$\int_{-r}^{+r} f(x)e^{ix}dx + \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}dz = 2\pi i \sum_{z_0\in H, |z_0|<r} Res(f(z)e^{iz}, z_0)$$

Per il lemma appena dimostrato, passando al limite $r \to +\infty$ l'integrale $\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}dz \to 0$ e si ha la tesi.

$\bowtie$

Esercizio: Calcolare $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

*Svolgimento:* Osserviamo che $\sin x = \Im(e^{ix})$ e dunque $I$ lo posso scrivere come $I = \Im \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}$ (assumiamo che l'integrale converga). Con tale sostituzione abbiamo introdotto un polo nell'origine (infatti il limite è $\infty$) e dunque speziamo $I$ come:

$$I = \Im\Big(\lim_{\varepsilon\to 0, r\to\infty}\Big[\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{ix}}{x}dx\Big]\Big)$$

Consideriamo l'integrale di $\frac{e^{ix}}{x}$ lungo la curva chiusa definita dalla semicorona circolare con archi $\gamma_\varepsilon$ e $\gamma_r$. Si ha:

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

e cioè

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz$$

Adesso passando ai limiti si ha:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz \to \pi i Res(\frac{e^{iz}}{z}, 0)$$

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz \to 0$$

dove per il primo integrale e per il secondo integrale sono stati utilizzati i risultati precedenti. $I$ assume pertanto il valore di $\Im(\pi i Res(\frac{e^{iz}}{z}, 0)) = \pi$.

**Lemma 6.0.5** *Supponiamo che $f$ soddisfi $\lim_{|z|\to+\infty, z\geq 0} f(z) = 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ è convergente; allora $\int_0^{+\infty} e^{ix}f(x)dx$ converge.*

*Dimostrazione:* Senza senso Vale la formula sul teorema senza senso.

$\bowtie$

Esercizio: Calcolare $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$. $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ poiché è una funzione pari. Abbiamo il problema che la funzione $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}$ non è limitata come funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$. Considero allora $\Re(e^{iz}) = \cos x$ e dunque

$$I = \frac{1}{2} \Re\Big( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{x^2+1} dx \Big) = \frac{1}{2} \Re\Big[ 2\pi i Res(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i) \Big]$$

per quanto visto in precedenza. Adesso $Res(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i) = \frac{1}{2ei} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2e}$

# Capitolo 7

# Principio di riflessione di Schwartz, ultime proposizioni/esercizi

**Lemma 7.0.1** *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ continua con $U$ aperto, allora $\omega = f(z)dz$ è chiusa $\Leftrightarrow$ $f$ è olomorfa.*

*Dimostrazione:* $\Rightarrow$) $\omega$ è localmente esatta $\Rightarrow$ esiste localmente una primitiva $F$ di $f \Rightarrow f = F'$ è olomorfa;
$\Leftarrow$) Teorema di Cauchy.

$\bowtie$

**Teorema 7.0.2 (Principio di riflessione di Schwartz)** *Consideriamo $H = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$ semipiano superiore, sia $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) \geq 0\}$, consideriamo $f : \overline{H} \to \mathbb{C}$ continua tale che $f_{|_H}$ è analitica e $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$; allora $f$ si estende a una funzione analitica su tutto $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione:* Consideriamo $H^- = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) < 0\}$ e definiamo la funzione

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(z) & z \in H \cup \mathbb{R} = \overline{H} \\ \overline{f(\bar{z}} & z \in H^- \end{cases}$$

Notiamo che è una buona definizione, poiché se $z$ sta nel semipiano negativo, $\bar{z}$ sta nel semipiano positivo. La funzione $\tilde{f}$ è continua ovunque: si incolla bene grazie al fatto che $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Vogliamo adesso dimostrare che $\tilde{f}$ è analitica ovunque (lo è già in $H$). Verifichiamo che $\tilde{f}$ è analitica $H^-$ osservando che le equazioni ci Cauchy-Riemann sono soddisfatte. Scriviamo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $f$ soddisfa $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ in $H$. Scriviamo adesso le equazioni di $\tilde{f}$ in $H^-$: $\tilde{f}(z) = u(x, -y) - iv(x, -y) = \overline{f(\bar{z})} = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$. Valgono allora le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

e grazie al fatto che sono soddisfatte le equazioni in $H$ sono soddisfatte anche in $H^- \Rightarrow \tilde{f}$ è olomorfa in $H^-$ (*Nota:* potevamo anche mostrare che per ogni punto di $H^-$ esiste uno sviluppo in serie di potenze partendo dallo sviluppo in serie dei punti di $H$). Mostriamo adesso che $\tilde{f}$ è analitica in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ (è sufficiente per il lemma precedente) con $R$ rettangolo contenuto in parte in $H$ e in parte in $H^-$ (per gli altri rettangoli abbiamo già mostrato che l'integrale fa 0 poiché la funzione è analitica nei due semipiani). Dividiamo il rettangolo $R$ nella parte contenuta in $H$, $R^+$, e nella parte contenuta in $H^-$, $R^-$ e percorriamo $R^+$ in senso antiorario e $R^-$ in senso antiorario. Il segmento in comune viene percorso in sensi diversi e quindi vale:

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial R^+} f(z)dz + \int_{\partial R^-} f(z)dz$$

A questo punto approssimiamo $R^+$ con $\lim_{\varepsilon\to\infty} R^+_\varepsilon$ e facciamo la stessa cosa per $R^-$; si ha:

$$\int_{\partial R} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial R^+_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\partial R^-_\varepsilon} f(z)dz = 0$$

poiché gli integrali stanno rispettivamente in $H$ e $H^-$ e $f$ è olomorfa in essi (e quindi esatta per Cauchy e semplice connessione).

$\bowtie$

Osservazione: il teorema precedente si può generalizzare prendendo un qualsiasi dominio simmetrico rispetto all'asse reale: consideriamo $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto simmetrico rispetto all'asse reale: definiamo $U^+ = U \cap H$ e $U^- = U \cap H^-$ e $U_0 = U \cap \mathbb{R}$; se $f : U^+ \cup U_0 \to \mathbb{C}$ è continua tale che $f_{|_U^+}$ è olomorfa e $f(U_0) \subseteq \mathbb{R}$, allora $f$ si estende ad una funzione olomorfa su tutto $U$.

Osservazione: Sia $\surd : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, allora non esiste una funzione che estenda $\surd$ ad una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}^*$, ma è possibile estendere $\surd$ a una funzione definita su tutto $\mathbb{C}^*$ e olomorfa su $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$.
Non possiamo invertire $f : z \mapsto z^2$ su tutto $\mathbb{C}$ poiché $f$ è un rivestimento a due fogli e dunque per invertirla dobbiamo scegliere uno dei due fogli; se $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sqrt{x} = e^{\frac{1}{2}log(x)}$ e dobbiamo quindi scegliere un ramo del logaritmo (ad esempio possiamo porre $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}Log_{[0,2\pi]}(z)}$)). Si ha quindi che $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos(\frac{Arg_{[0,2\pi]}(z)}{2}) + i\sin(\frac{Arg_{[0,2\pi]}(z)}{2}))$.

**Proposizione 7.0.3** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $D \subseteq \mathbb{C}$ disco aperto, $f : U \to \mathbb{C}$ analitica e non costante tale che $|f|$ sia costante su $\partial D$. Allora $f$ ha almeno uno zero in $D$.*

*Dimostrazione:* Fissiamo $z_0 \in D$ e definiamo $g(z) = f(z) - f(z_0)$. $g(z_0) = 0$ e, se fossero soddisfatte le ipotesi del teorema di Rouché per $f$ e $g$ avrei la tesi. $|g(z) - f(z)| = |f(z_0)| < |f(z)| \forall z \in \partial D$ poiché per il principio del massimo modulo il massimo si trova in $\partial D$, ma $|f|$ è costante in $\partial D$ e dunque per il teorema di Rouché $f$ ha almeno una radice in $D$.

$\bowtie$

Esercizio: Determinare il numero degli zeri del polinomio $g(z) = z^{87}+36z^{57}+71z^4+z^3-z+1$ in $B(0,1)$ e in $B(0,2)$
*Svolgimento:* Sia $f_1(z) = 71z^4$ che ha uno zero di molteplicità 4 in $B(0,1)$. Adesso $|g(z)-f_1(z)| = |z^{87} + 36z^{57} + z^3 - z + 1| < 1 + 36 + 1 - 1 + 1 = 38 < |f_1(z)|$ se $|z| = 1$. Posso dunque applicare Rouché e quindi $g(z)$ ha 4 zeri in $B(0,1)$. Consideriamo adesso $f_2(z) = z^{87}$, allora se $|z| = 2 \Rightarrow |g(z) - f_2(z)| = |36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1| < 2^{87} = |f_2(z)|$ e dunque $g(z)$ ha 87 zeri in $B(0,2)$ per il teorema di Rouché.

Osservazione: Anche se le palle considerate fossero state chiuse i risultati sarebbero stati gli stessi sempre per il teorema di Rouché.

Esercizio: Sia $f \in M(\hat{\mathbb{C}})$ tale che $f'(z) = f(z)$ per ogni $z \in U$ aperto dove è definita $f$, allora $f = 0$.
*Svolgimento:* Poiché $f \in M(\hat{\mathbb{C}}) \Rightarrow f = \frac{p}{q}$ con $q \neq 0$; allora $f' = \frac{p'q-q'p}{q^2} = \frac{p}{q}$ per ipotesi e dunque $p'(z)q(z) - q'(z)p(z) = p(z)q(z)$ per ogni $z$ tale che $q(z) \neq 0$ e dunque su tutto $U$ per il principio del prolungamento analitico. Per questioni di grado dei polinomi si deve avere che $p = 0$ e dunque $f = 0$

**Definizione 7.1** *Siano $U, V \subseteq \mathbb{C}$ aperti, una funzione $f : U \to V$ si dice* ***biolomorfa*** *se è olomorfa e bigettiva.*

**Proposizione 7.0.4** *Sia $f : U \to V$ biolomorfa allora:*

1. *$f^{-1} : V \to U$ è biolomorfa;*
2. *$f(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$*

*Dimostrazione:*

1. Per il teorema della funzione aperta $f$ è aperta e dunque $f$ è un omeomorfismo; allora $f^{-1}$ è un omeomorfismo (continua e bigettiva). Per il teorema della funzione implicita $f^{-1}$ è olomorfa al di fuori di un insieme $A = \{w = f(z) | f'(z) = 0\}$ discreto. Preso un qualsiasi punto di $V$, $f^{-1}$ è limitata in un intorno ditale punto (per la continuità), ma allora $f^{-1}$ non può avere né poli, né singolarità essenziali $\Rightarrow$ $f^{-1}$ è olomorfa;
2. Possiamo scrivere $z = f(f^{-1}(z))$ per ogni $z \in V$ da cui derivando si ottiene $1 = f'(f^{-1}(z))(f^{-1})'(z)$. Queste devono essere diverse da 0 per ogni $z$ e quindi la derivata di $f$ in ogni punto è diversa da 0.

$\bowtie$

OSSERVAZIONE: Non esiste una funzione biolomorfa $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$; infatti se esiste $f^{-1} : \mathbb{C} \to B(0,1)$ sarebbe una funzione intera e limitata e dunque per Louville sarebbe costante, assurdo.

**Proposizione 7.0.5** *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e non costante; allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *$\exists g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $g^2 = f$;*
2. *$\exists h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e non costante ed esiste $M > 0$ tale che $|h^2| \leq M|f|$ su tutto $\mathbb{C}$.*

*Dimostrazione:*

$1 \Rightarrow 2)$ Ovvio, basta porre $h = g$ e $M = 1$;

$2 \Rightarrow 1)$ Sia $\Phi = \frac{h^2}{f} \in M(\mathbb{C})$; essendo limitata, questa funzione può avere solo singolarità eliminabili, quindi si estende su tutto $\mathbb{C}$ a una funzione intera e limitata e dunque per il teorema di Louville $h^2 = kf$ su tutto $\mathbb{C}$ per qualche $k \in \mathbb{C}$. Posto allora $\lambda^2 = k$ scelgo $g = \frac{h}{\lambda}$ e ho la tesi.

$\bowtie$